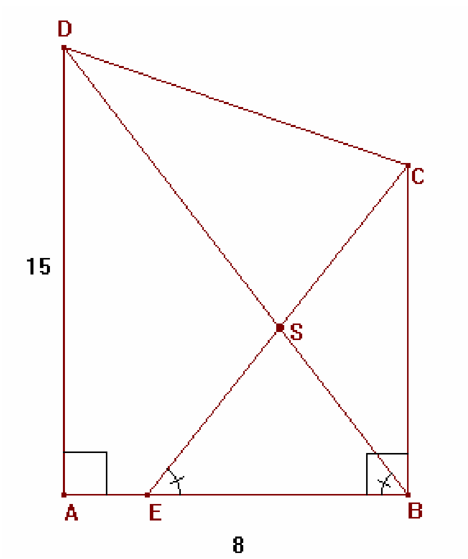
Uitwerkingen Hoofdstuk 8

Vermoedens en bewijzen

1. Zijde AB is tweemaal zo groot als zijde AD . Zo is ook zijde AC tweemaal zo groot als zijde AE. ⇒
Δ ABC is een vergroting van Δ ADE met factor 2.

2a.



Gegeven: ABCD is een rechthoekig trapezium
∠ BEC = ∠ ABD ; AB = 8 en AD = 15
CE = 13,6

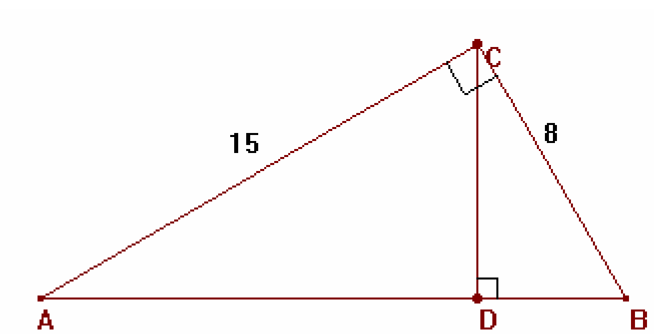
Te bew. Δ ABD ~ Δ BEC

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle ABC(90^o) \\ \angle ABD = \angle BEC(geg)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD : \ \Delta BEC(hh)$

b. Om AE te berekenen hebben we EB nodig en dus ook BC. We hebben ook BD nodig.
Er geldt: $BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow BD = 17$.
Uit de gelijkvormigheid volgt : $\frac{AB}{EB} = \frac{BD}{EC} \Rightarrow \frac{8}{EB} = \frac{17}{13,6} \Rightarrow 17.EB = 8.13,6 \Rightarrow$

$EB = \frac{8.13,6}{17} = 6,4 \Rightarrow AE = 8 - 6,4 = 1,6$

3.



Geg. ∠ C = 90° ; AC = 15 ; BC = 8
CD ⊥ AB

Te bew. 3 paar gelijkvormige driehoeken.

Bewijs:
$\left.\begin{array}{l}\angle ADC = \angle ACB(90^o) \\ \angle A = \angle A\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC : \ \Delta ACB(hh)$

$$\left.\begin{array}{l}\angle BDC=\angle ACB(90^{o})\\ \angle B=\angle B\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta BDC:\ \Delta BCA(hh)$$

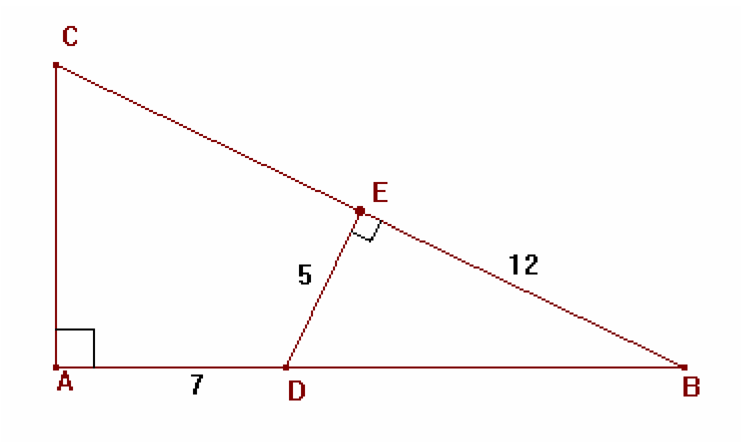
$$\left.\begin{array}{l}\angle ADC=\angle BDC(90^{o})\\ \left.\begin{array}{l}\angle A=90^{o}-\angle B\\ \angle DCB=90^{o}-\angle B\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A=\angle DCB\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ADC:\ \Delta CDB(hh)$$

b. Eerst AB : $\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 225 + 64 = 289 \Rightarrow AB = 17$

Nu geldt : $\sin(\angle A)=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{BC}{AB}\Rightarrow\dfrac{CD}{15}=\dfrac{8}{17}\Rightarrow 17.CD=8.15\Rightarrow CD=\dfrac{120}{17}=7\tfrac{1}{17}$

Δ ADC ~ ΔACB $\Rightarrow\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}\Rightarrow\dfrac{AD}{15}=\dfrac{15}{17}\Rightarrow 17.AD=225\Rightarrow AD=\dfrac{225}{17}=13\tfrac{4}{17}$

cos($\angle$B) = $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{BC}{AB}\Leftrightarrow\dfrac{BD}{8}=\dfrac{8}{17}\Leftrightarrow 17.BD=64\Rightarrow BD=\tfrac{64}{17}=3\tfrac{13}{17}$



4.
Gegeven: CA $\perp$ AB en DE $\perp$ BC
AD = 7 ; DE = 5 en BE = 12

Te ber. AC en CE

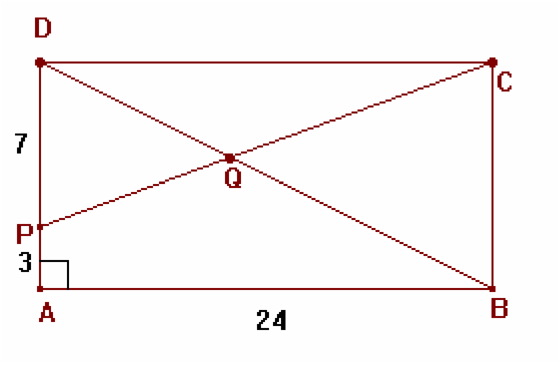
Ber. In Δ BDE Pyth. $\Rightarrow BD^2 = DE^2 + BE^2 \Leftrightarrow BD^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow BD = 13$

Nu geldt: tan($\angle$B) = $\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{AC}{AB}\Leftrightarrow\dfrac{5}{12}=\dfrac{AC}{7+13}\Leftrightarrow 12.AC=100\Rightarrow AC=\tfrac{100}{12}=8\tfrac{1}{3}$

Ook geldt: cos($\angle$B) = $\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{AB}{BC}\Leftrightarrow\dfrac{12}{13}=\dfrac{20}{BC}\Rightarrow 12.BC=260\Rightarrow BC=\tfrac{260}{12}=21\tfrac{2}{3}$

CE = BC – BE = $21\tfrac{2}{3}-12=9\tfrac{2}{3}$

5.



Geg. Rechthoek ABCD ; AB = 24 ; AP= 3 ; PD = 7

te ber. PQ

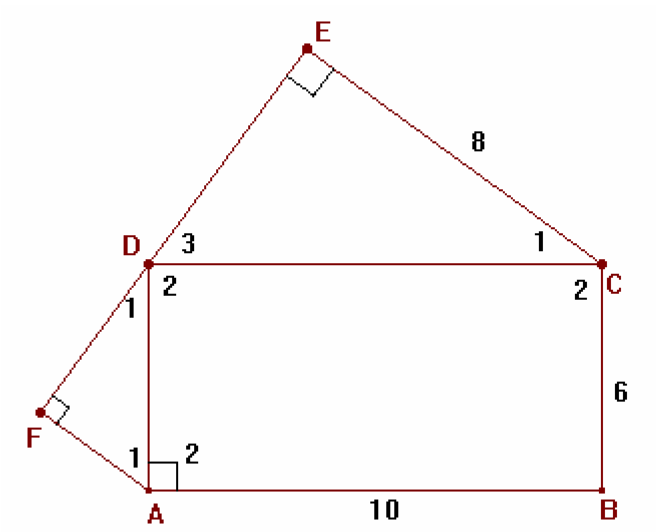
Berekening: In Δ PCD Pyth. ⇒ $PC^2 = CD^2 + PD^2 \Leftrightarrow PC^2 = 24^2 + 7^2 \Leftrightarrow PC^2 = 625 \Rightarrow PC = 25$

$$\left.\begin{array}{l}\angle DQP = \angle BQC(overstaandehoeken)\\ \angle QPD = \angle QCB(z-hoeken)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PQD : \Delta CQB(hh) \Rightarrow$$

$\dfrac{PQ}{QC} = \dfrac{PD}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{PQ}{QC} = \dfrac{7}{10}$ Verder weten we dat PC = 25 ⇒

PQ = $\frac{7}{17}.25 = \frac{175}{17} = 10\frac{5}{17}$

6a.



Gegeven: ∠ E = ∠ F = 90° ;
rechthoek ABCD; AB = 10 ; BC = 6 en
CE = 8

Te ber. AF

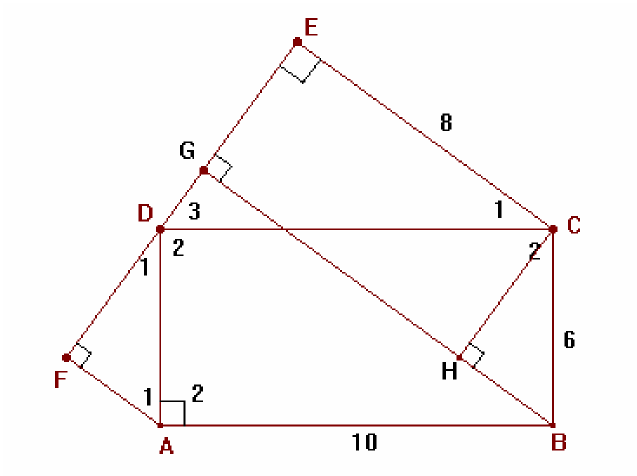
Berekening: $\left.\begin{array}{l}\angle D_1 + \angle D_3 = 90^\circ\\ \angle D_1 + \angle A_1 = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle D_3$ ⇒ cos($\angle A_1$) = cos ($\angle D_3$) ⇒

$\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{DE}{DC}$ In vullen ⇒ $\dfrac{AF}{6} = \dfrac{DE}{10}$

Nog even DE berekenen in Δ CDE ⇒ $DE^2 + CE^2 = CD^2 \Rightarrow DE^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow DE = 6 \Rightarrow$

$$\frac{AF}{6} = \frac{6}{10} \Rightarrow 10.AF = 36 \Rightarrow AF = 3{,}6$$

b.



Nu nog gegeven: BG ⊥ DE

te ber. BG

Berekening: Teken CH $\perp$ BG $\Rightarrow$ AF // BG (BH) en BC // AD $\Rightarrow$

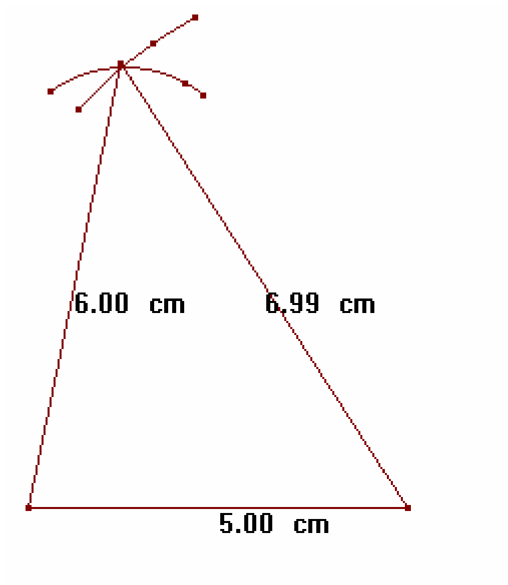
$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle HBC \\ \angle F = \angle H(90^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AFD : \Delta BHC(hh) \Rightarrow \frac{AF}{HB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{3{,}6}{HB} = \frac{6}{6} \Rightarrow \text{HB} = 3{,}6$$

Verder geldt omdat vierhoek HCEG een rechthoek is , dat GH = CE = 8

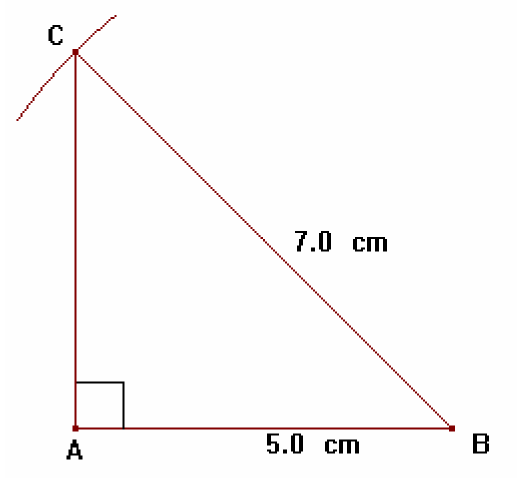
$\Rightarrow$ BG = BH + GH = 3,6 + 8 = 11,6

7.

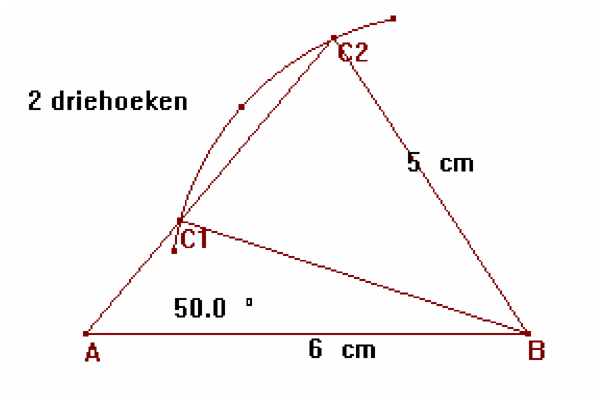
a.



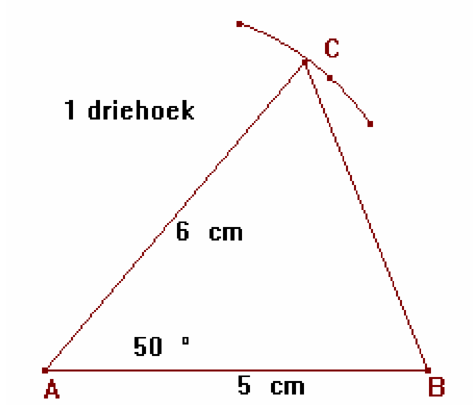
b.



c

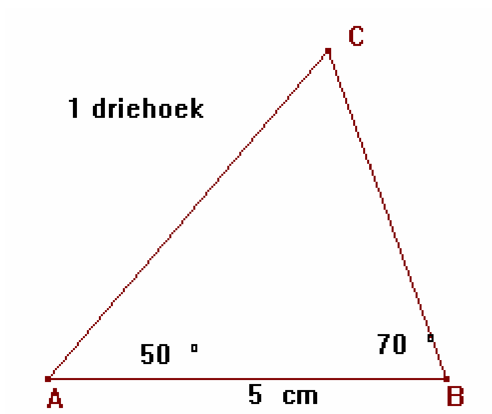


d.

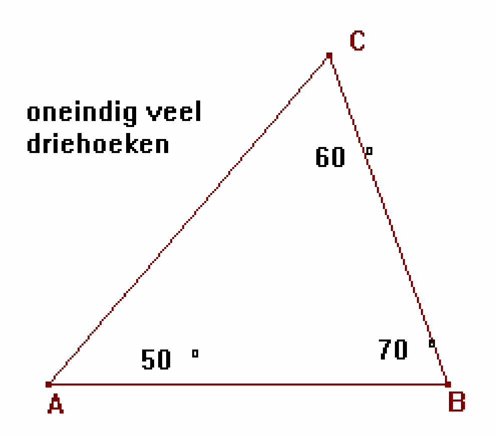


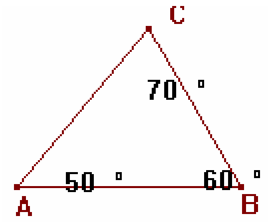
e. $\angle$A = 180º - 60º - 70º = 50º

f. zelfde driehoek als bij e.

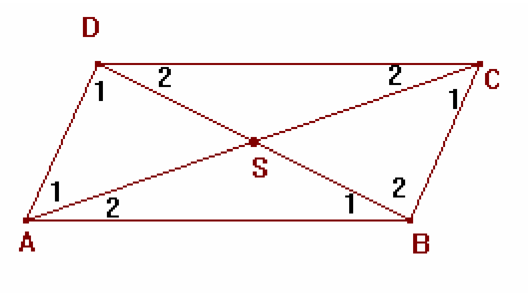


g.





8.

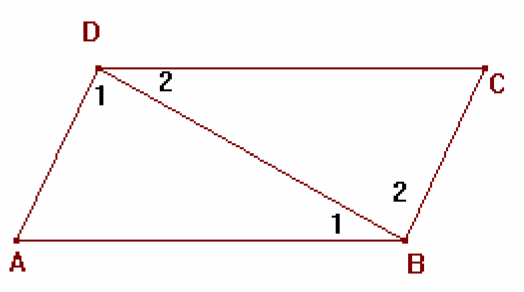


Gegeven pgm ABCD

te bew. AS = CS en BS = DS

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle C_1 (AD // BC) \\ \angle D_1 = \angle B_2 (AD // BC) \\ AD = BC (zie\ boekblz.\ 121)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ASD \cong \Delta CSB \Rightarrow$ AS = CS en BS = DS

9.



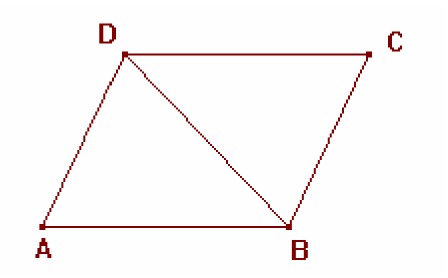
Gegeven: AB = CD en BC = AD

te bew. ∠ A = ∠ C

Bewijs: Trek lijnstuk BD. Dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l}AB = CD (geg.) \\ AD = BC (geg.) \\ BD = BD\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta CDB (zzz) \Rightarrow \angle A = \angle C$$

10a.



Gegeven AB=BC =CD = AD

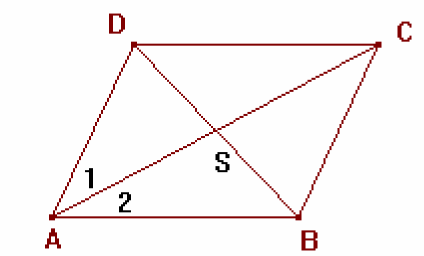
te bew. AB //CD en AD //BC

Bewijs: Teken weer lijnstuk BD.

$$\left.\begin{aligned} AB &= CD(geg.) \\ AD &= BC(geg.) \\ BD &= BD \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta CDB(zzz) \Rightarrow \angle ABD = \angle CDB \Rightarrow AB \parallel CD$$

Verder volgt ook uit de congruentie dat $\angle ADB = \angle DBC \Rightarrow AD \parallel BC$.

b.



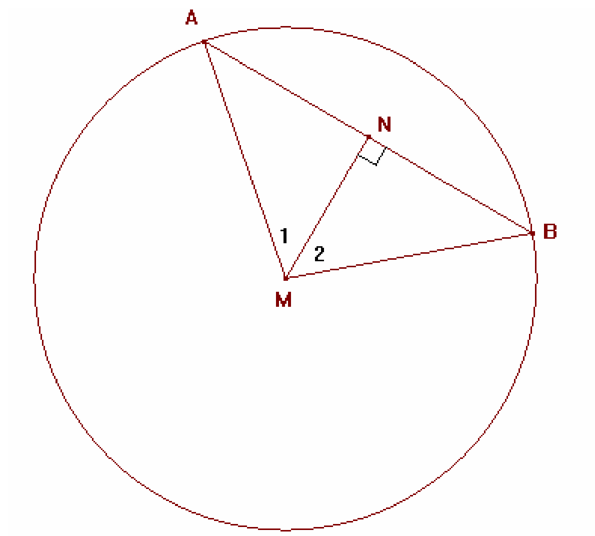
Gegeven verder de diagonalen.

te bew. De diagonalen zijn deellijnen dus b.v $\angle A_1 = \angle A_2$

Bewijs: $$\left.\begin{aligned} AC &= AC \\ \text{AD} &= \text{AB(geg)} \\ \text{DC} &= \text{BC(geg)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta ABC \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2$$

Zo ook bij de andere hoeken ⇒ De diagonalen delen de hoeken van de vierhoek middendoor.

11.



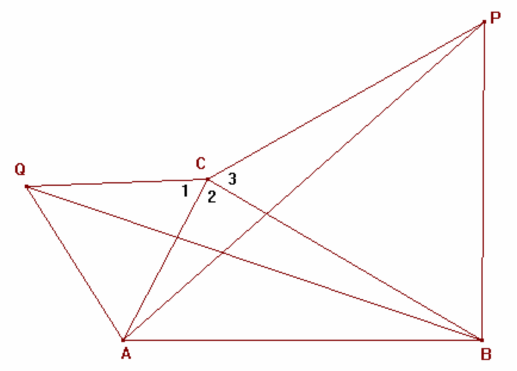
Gegeven: Cirkel met middelpunt M
$MN \perp AB$

Te bew. AN = BN

Bewijs: Teken de lijnstukken MB en MA .

Bewijs: $$\left.\begin{aligned} AM &= BM\,(straal) \\ MN &= MN \\ \angle ANM &= \angle BNM\,(90^\circ) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ANM \cong \Delta BNM\,(zzr) \Rightarrow AN = BN$$

12.

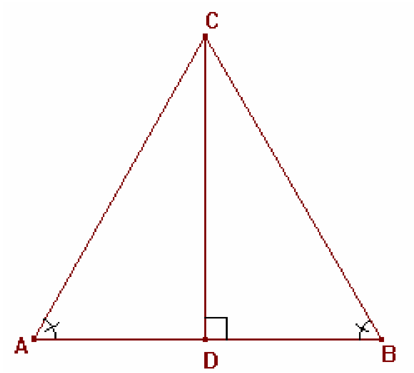


Gegeven: Δ ABC
Δ ACQ en Δ BCP zijn gelijkzijdig.

te bew. AP = BQ

Bewijs: $$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \angle C_1 &= 60^\circ(gelijkzijdig) \\ \angle C_3 &= 60^\circ(gelijkzijdig) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle C_1 = \angle C_3 \\ &QC = AC(gelijkzijdig) \\ &PC = BC(gelijkzijdig) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ACP \cong \Delta QCB(zhz) \Rightarrow AP = QB$$

13.



geg. ∠ A = ∠ B

te bew. AC = BC

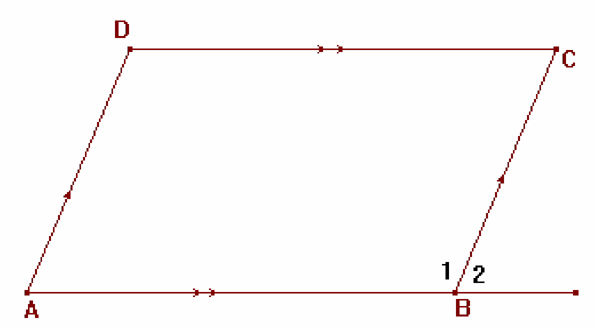
Bewijs: Teken lijnstuk CD ⊥ AB. ⇒

$$\left.\begin{aligned} &\angle A = \angle B(geg) \\ &CD = CD \\ &\angle ADC = \angle BDC(90^\circ) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta BDC\,(\text{zhh}) \Rightarrow \text{AC} = \text{BC}$$

14

$$\left.\begin{aligned} \angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ \Rightarrow \angle A_1 = 180^\circ - \angle A_2 \\ \angle A_3 + \angle A_2 = 180^\circ \Rightarrow \angle A_3 = 180^\circ - \angle A_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_3$$

15.



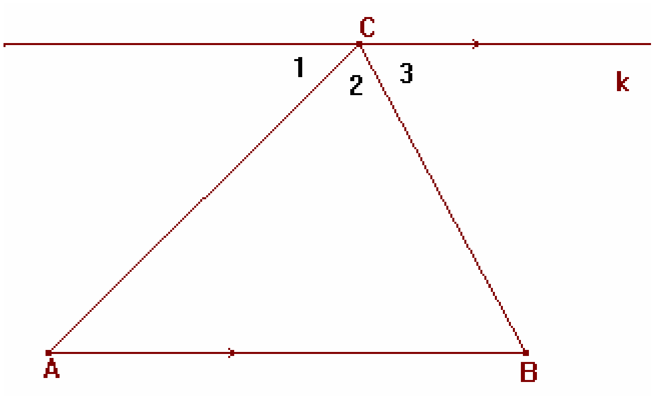
gegeven: ABCD is p.g.m.

te bew.
$\angle A = \angle C$
$\angle B = \angle D$

bewijs: Verleng zijde AB. $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle B_2 (AD // BC) \\ \angle C = \angle B_2 (AB // CD)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle C$

$$\left.\begin{array}{l}\angle B_1 + \angle A = 180°(U - figuur) \\ \angle D + \angle A = 180°(U - figuur)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B_1 = \angle D = \angle B$$

16.



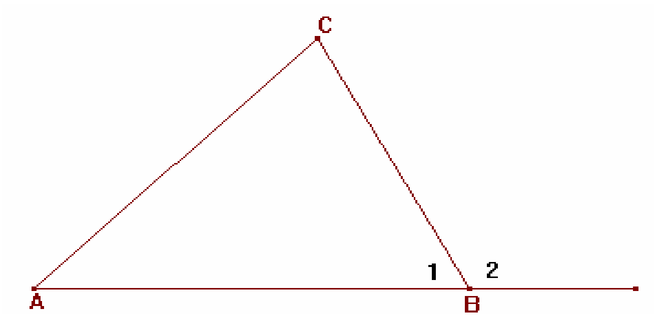
geg. Δ ABC

te bew. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Bewijs:
Teken een lijn k door C // AB.

$$\left.\begin{array}{l}k // AB \Rightarrow \angle A = \angle C_1 (Z - hoeken) \\ k // AB \Rightarrow \angle B = \angle C_3 \\ \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180°(gestrekte\ hoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

17.



geg. Δ ABC met buitenhoek B_2

te bew. $\angle B_2 = \angle A + \angle C$

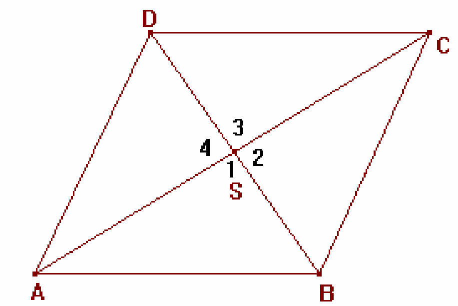
Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180° \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180°(gestrekte\ hoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B_2 = \angle A + \angle C$

18.

a. Dat was bij opgave 10a.

b. Bij opgave 8.

c.



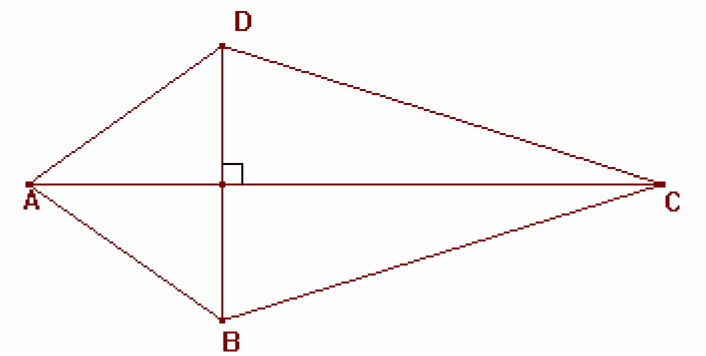
gegeven : ABCD is een ruit

te bew. $AC \perp BD$

bewijs: ABCD is een ruit $\Rightarrow$ ABCD is ook dus een pgm $\Rightarrow$

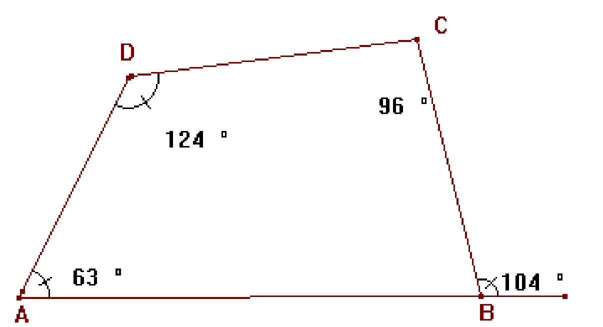
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} BS = DS(pgm) \\ AS = AS \\ AB = AD(ruit) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABS \cong \Delta ADS(zzz) \Rightarrow \angle S_1 = \angle S_4 \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \angle S_1 + \angle S_4 = 180°(gestrekte\ hoek) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle S_1 = 90° \Rightarrow \ AC \perp BD$$

19.



De diagonalen staan loodrecht op elkaar , maar ABCD is geen ruit , maar wel een vlieger.

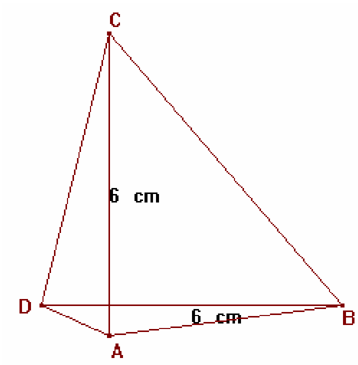
20.



$\frac{1}{3}.(63+124+96) \approx 94° \neq 104°$

21.

a. Niet omkeerbaar. Tegenvoorbeeld:
Zie de figuur: $AC = BD = 6$, maar ABCD is duidelijk geen rechthoek.



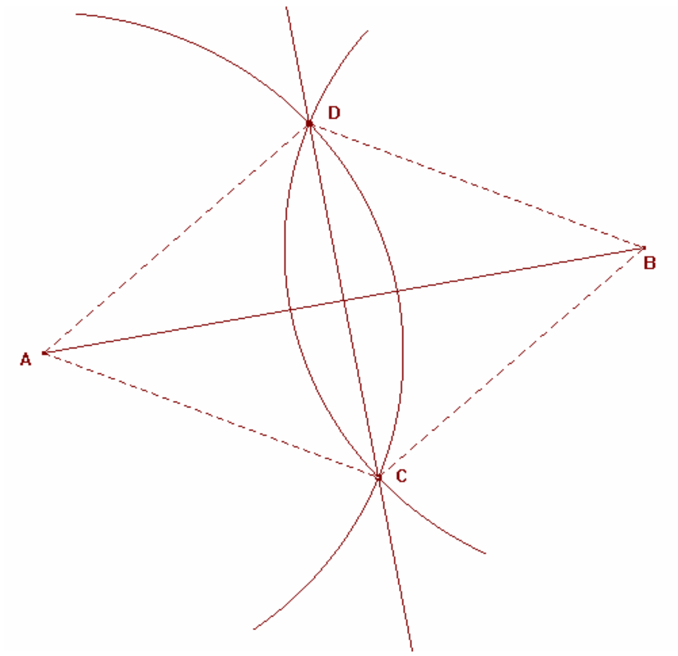
b. Deze stelling is omkeerbaar.

Als de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor delen, dan is de vierhoek een pgm.

c. Ook omkeerbaar:
Als geldt: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ dan is driehoek ABC rechthoekig met ∠ A = 90º.

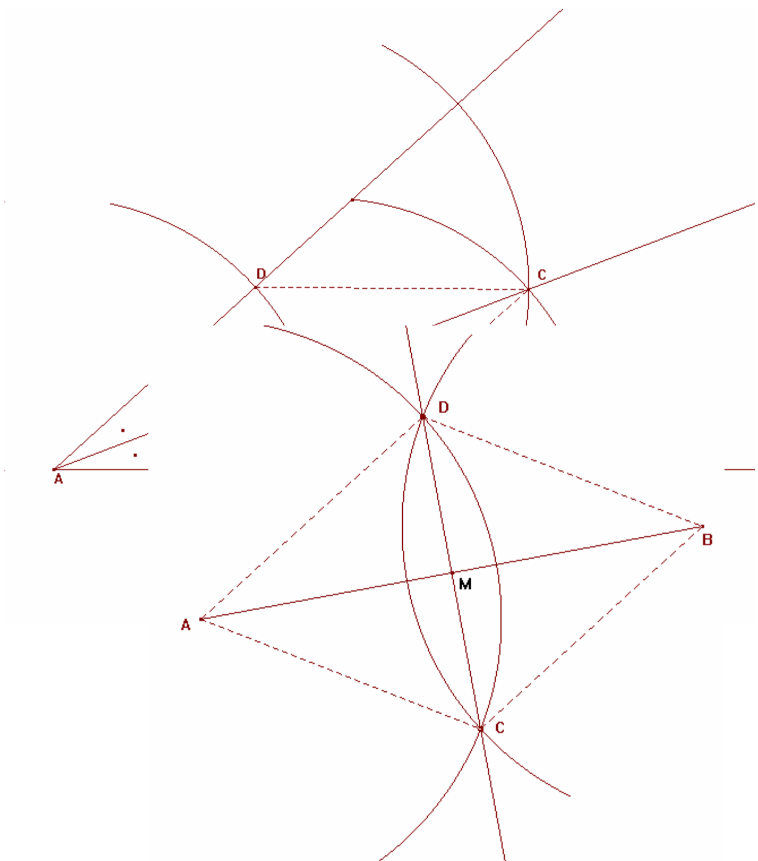
d. Niet omkeerbaar . Tegenvoorbeeld: zie de vlieger bij opgave 19.

22.



Toelichting:
Bij het omcirkelen vanuit punt A geldt dat AD = AC.
Zo geldt ook vanuit punt B dat BD = BC.
Aangezien we dezelfde straal hebben genomen geldt dus dat vierhoek ACBD een ruit is met symmetrieas DC ⇒
DC deelt AB loodrecht middendoor en is dus middelloodlijn van lijnstuk AB.

23.



Toelichting:
Vanuit punt A omcirkelen ⇒
AB = AD.
Nu vanuit de punten B en D met dezelfde straal omcirkelen. ⇒
Vierhoek ABCD is dus een ruit.
AC is dan as van symmetrie. ⇒
Lijn AC is dus bissectrice van ∠ A.

Gegeven: Vierhoek ABCD met

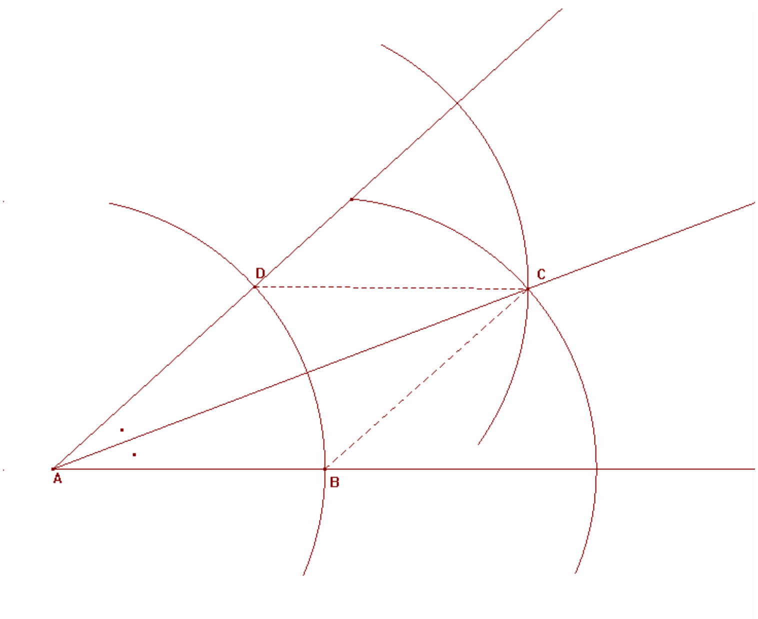
AC = BC = BD = AD als gevolg van de constructie.

24a.

Te bew. CD is middelloodlijn AB.

Bewijs. Zie ook de toelichting bij opgave 22.
AC = BC = BD = AD ⇒ vierhoek ACBD is een ruit.
BD is dus symmetrieas. ⇒ CD ⊥ AB en AM = BM ⇒
CD is middelloodlijn van AB.

b. Zie ook opgave 23.

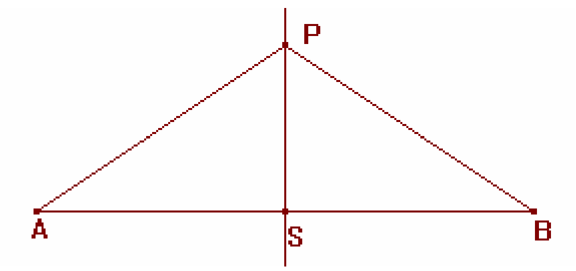


Gegeven vanuit de constructie dat
AB = BC = CD = AD

Te bew. AC is bissectrice van ∠ A

Bewijs:
Vierhoek ABCD is dus een ruit.
AC is dan as van symmetrie. ⇒
Lijn AC is dus bissectrice van
∠ A.

25a.



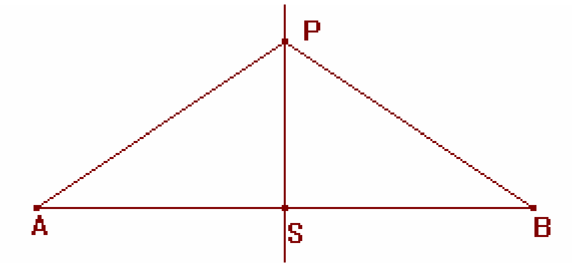
geg. AP = BP

te bew. P op mll van AB

Bewijs: Teken de lijn door P ⊥ AB ⇒

$$\left.\begin{array}{l} AP = BP(geg) \\ \angle PSA = \angle PSB(90^\circ) \\ PS = PS \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ASP \cong \Delta BSP \text{ (zzr)} \Rightarrow \text{AS = BS en PS} \perp \text{AB} \Rightarrow \text{P op mll van AB}$$

b. De omkering is : **Elk punt dat op de middelloodlijn van AB ligt heeft gelijke afstanden tot de punten A en B.**

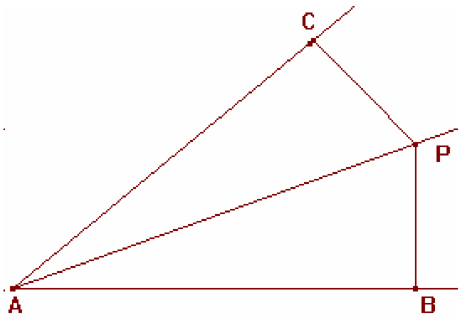


geg. AS = BS en PS ⊥ AB

te bew. AP = BP

Bewijs: $\left.\begin{array}{l} AS = BS(mll) \\ \angle PSA = \angle PSB(mll) \\ PS = PS \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ASP \cong \Delta BSP$ (zhz) $\Rightarrow$ AP = BP

26a.



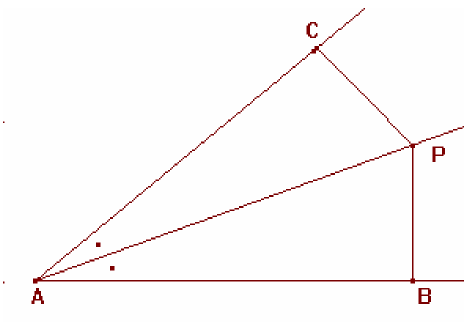
Gegeven: CP = BP

Te bew. ∠ CAP = ∠ BAP

Bewijs. Teken de afstanden CP en BP loodrecht op AC en AB. ⇒

$\left.\begin{array}{l} CP = BP(geg) \\ \angle ACP = \angle ABP(90°) \\ AP = AP \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABP \cong \Delta ACP$ (zzr) ⇒ ∠ CAP = ∠ BAP ⇒ AP is deellijn van ∠ A ⇒ P ligt op de deellijn of bissectrice van ∠ A.

b. Omkering: **Als een punt op de bissectrice van een hoek ligt dan heeft dat punt gelijke afstanden tot de benen van die hoek.**



Geg. ∠ CAB en deellijn AP

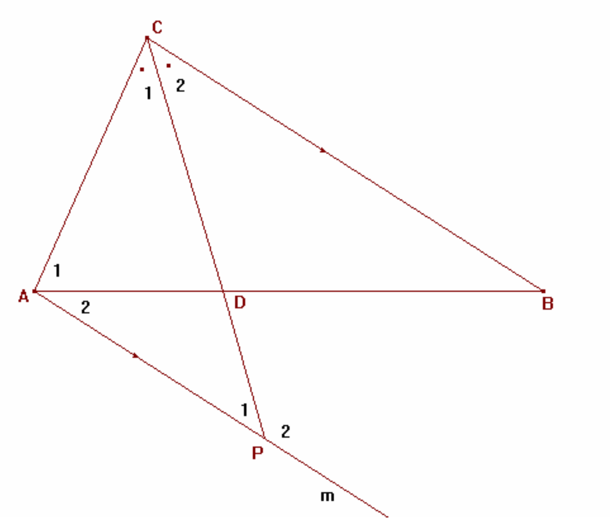
Te bew. CP = BP

Bewijs: Teken de lijnstukken CP en BP loodrecht op AC en AB. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ACP = \angle ABP(90^\circ)\\ AP = AP\\ \angle CAP = \angle BAP(deellijn)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACP \cong \Delta ABP \text{ (zhh)} \Rightarrow CP = BP \Rightarrow \text{P heeft gelijke afstanden}$$

tot de benen AB en AC.

27.



Gegeven Δ ABC met deellijn van ∠ C.

Te bew. AD : BD = AC : BC

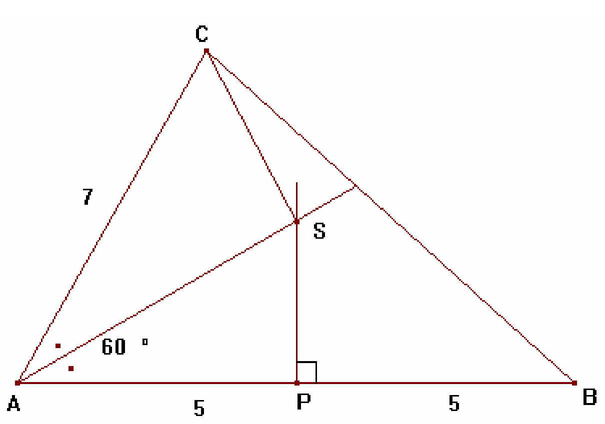
Bewijs: Teken hulplijn m door A // BC en verleng deellijn uit C $\Rightarrow$ snijpunt P.

$$\left.\begin{array}{l}\angle P_1 = \angle C_2(Z-hoek)\\ \angle A_2 = \angle B(z-hoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \text{ APD} \sim \Delta \text{ BCD (hh)} \Rightarrow AD : BD = AP : BC$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle P_1 = \angle C_2(z-hoek)\\ \angle C_1 = \angle C_2(deellijn)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_1 = \angle C_1 \Rightarrow \Delta APC \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow AP = AC.$$

Uit bovenstaande volgt dus : AD : BD = AC : BC

28a.



Gegeven: ∠ A = 60° ;
PS is m.l.l. van AB. ; AP = BP = 5 en
AC = 7

Bereken exact: AS

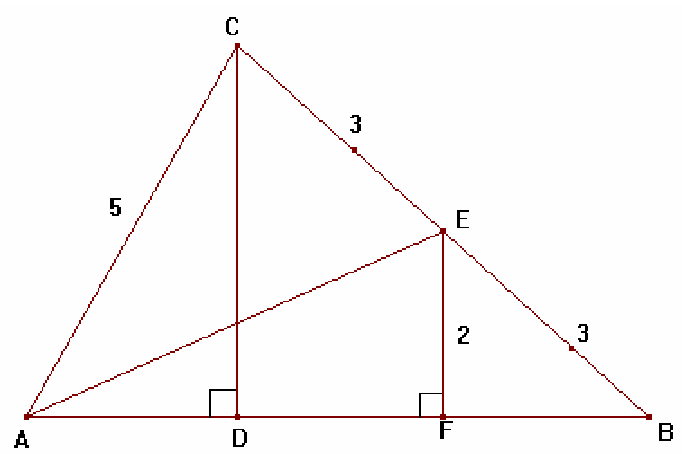
Ber. AS is deellijn $\Rightarrow$

$\angle$ SAP = 0,5 . 60° = 30° Nu geldt: cos (30°) = $\dfrac{AP}{AS} \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \dfrac{5}{AS} \Rightarrow$

AS = $\dfrac{5}{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} = 3\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$

b. Als CS $\perp$ AS dan zou moeten gelden : cos(30°) = $\dfrac{AS}{AC}$ Nu de controle:

$\dfrac{3\tfrac{1}{3}\sqrt{3}}{7} = \dfrac{3\tfrac{1}{3}\sqrt{3}}{7} \cdot \dfrac{3}{3} = \dfrac{10}{21}\sqrt{3} \neq \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ Het klopt dus niet $\Rightarrow \angle$CSA $\neq$ 90°.



29.
Gegeven: Δ ABC met AC = 5 en BC = 6 ; CE = BE ; EF = 2
CD $\perp$ AB en EF $\perp$ AB

Bereken : AB

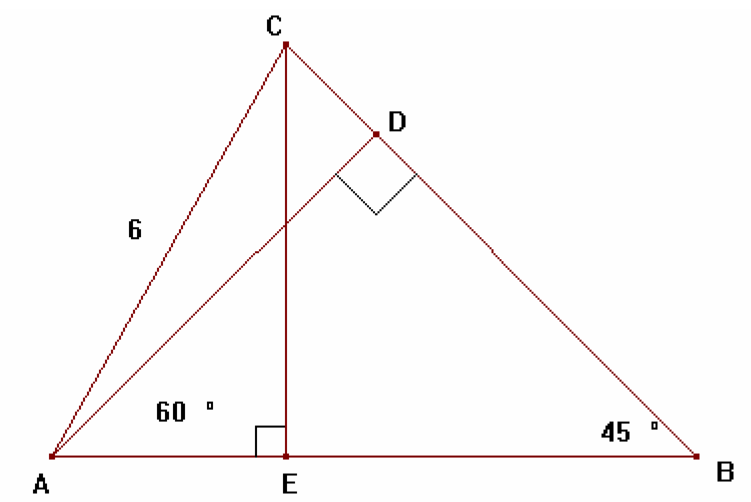
Berekening: EF // CD $\Rightarrow$ Δ CDB is een A-figuur $\Rightarrow \dfrac{EF}{CD} = \dfrac{EB}{BC} \Rightarrow \dfrac{2}{CD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow CD = 4$

Nu Pyth. In Δ ADC $\Rightarrow$ $AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow AD^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AD = 3$

Ook Pyth. In Δ FBE $\Rightarrow$ $EB^2 = FB^2 + EF^2 \Rightarrow FB^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow FB = \sqrt{5}$

Vanuit de A-figuur weten we ook: $\dfrac{EB}{CE} = \dfrac{FB}{DF} \Rightarrow \dfrac{3}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{DF} \Rightarrow DF = \sqrt{5} \Rightarrow$

AB = AD + DF + FB = $3 + 2\sqrt{5}$



30a.
Gegeven: $\angle$ A = 60° ; $\angle$ B = 45°
AC = 6 en AD $\perp$ BC

Te ber. AB

Berekening: Teken CE ⊥ AB. In Δ AEC geldt : cos (60°) = $\dfrac{AE}{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \dfrac{AE}{6} \Rightarrow AE = 3$

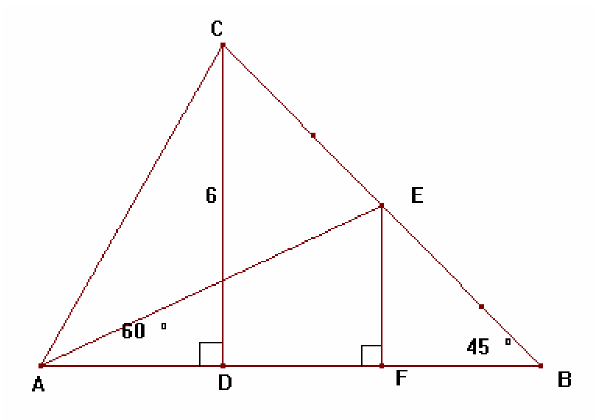
Verder geldt: sin(60°) = $\dfrac{CE}{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} = \dfrac{CE}{6} \Rightarrow CE = 3\sqrt{3}$

In Δ BEC geldt dat ∠ ECB = 90° - 45° = 45° ⇒ Δ EBC is gelijkbenig ⇒ EB = EC = 3√3 ⇒
AB = AE + EB = 3 + 3√3

b. In Δ ABD geldt : ∠ DAB = 90° - 45° = 45° Dus ∠ CAD = 60° - 45° = 15°

Nu geldt: sin(15°) = $\dfrac{CD}{AC} \Leftrightarrow Sin(15^{o}) = \dfrac{CD}{6} \Rightarrow CD = 6.\sin(15^{o})$ ≈ 1,55

31.



gegeven: Δ ABC ; CD ⊥ AB ;
BE = CE ; ∠ A = 60° en ∠ B = 45°

te ber. ∠ EAB

Berekening: Teken EF ⊥ AB In Δ CDF geldt: ∠ DCB = 90° - 45° = 45° ⇒ CD = DB = 6
In Δ EFB geldt : ∠ FEB = 90° - 45° = 45° ⇒ FE = FB Aangezien Δ DBC een A-figuur is

geldt: $\dfrac{FB}{DB} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{EF}{CD} \Rightarrow \dfrac{FB}{6} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{EF}{6} \Rightarrow EF = FB = 3$

In Δ ADC geldt : $\tan(60^{o}) = \dfrac{CD}{AD} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \dfrac{6}{AD} \Rightarrow AD = \dfrac{6}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

DF = DF – FB = 6 – 3 = 3 .

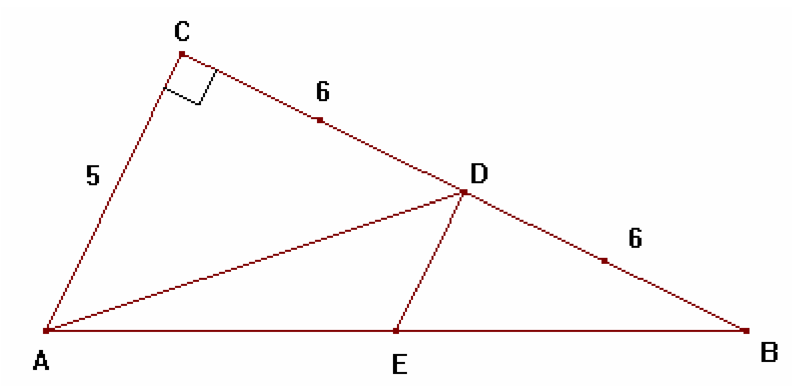
In Δ AEF geldt nu : EF = 3 en AF = 2√3 + 3 ⇒

tan(∠EAF) = tan(∠EAB) = $\dfrac{EF}{AF} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}+3}$ ⇒ ∠ EAB ≈ 25°

32.

Gegeven: Δ ABC ; CD = BD
∠ C = 90° ; AC // ED ;
AC = 5 en BC = 12

Te ber. AE ; AD en ∠ BAD



Berekening: Pyth. In Δ ABC $\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow AB^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow AB = 13$

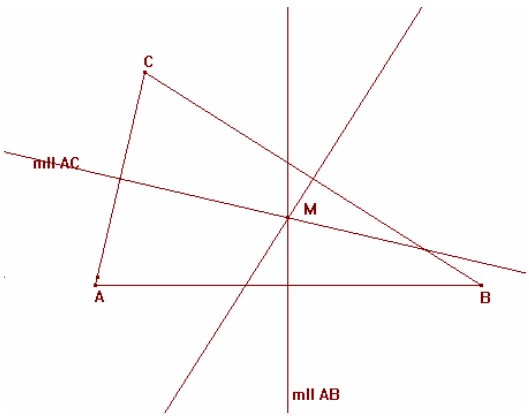
Δ ABC is een A-figuur $\Rightarrow \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AE}{BE} \Rightarrow \dfrac{6}{6} = \dfrac{AE}{BE} \Rightarrow$ AE = EB

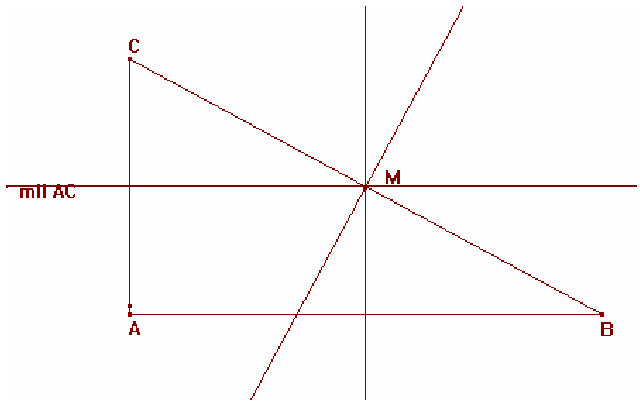
AB = 13 $\Rightarrow$ AE = 0,5 . 13 = 6,5

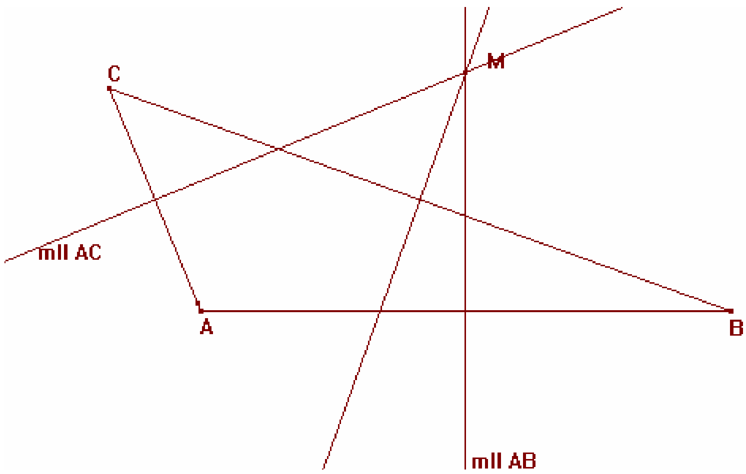
Pyth. In Δ ADC: $\Rightarrow AD^2 = AC^2 + CD^2 \Leftrightarrow AD^2 = 25 + 36 = 61 \Rightarrow AD = \sqrt{61}$

$\angle$ BAD berekenen we uit het verschil van de hoeken BAC en CAD.
In Δ CAD geldt : tan ($\angle$ CAD) = 6/5 = 1,2 $\Rightarrow \angle$ CAD $\approx$ 50,19
In Δ BAC geldt: tan($\angle$BAC) = 12/5 = 2,4 $\Rightarrow \angle$ BAC $\approx$ 67,38 $\Rightarrow$
$\angle$ BAD = $\angle$ BAC - $\angle$ DAC = 67,38 – 50,19 $\approx$ 17°

33a.

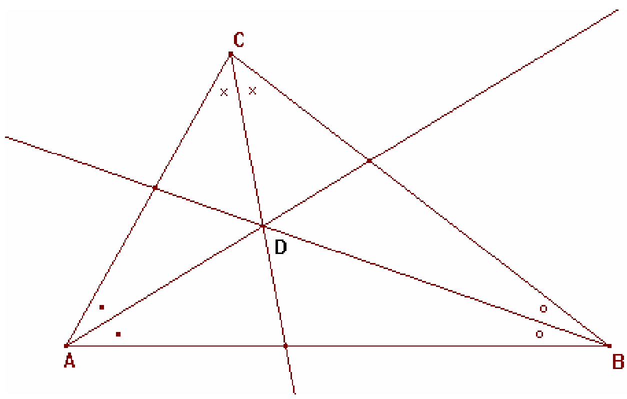


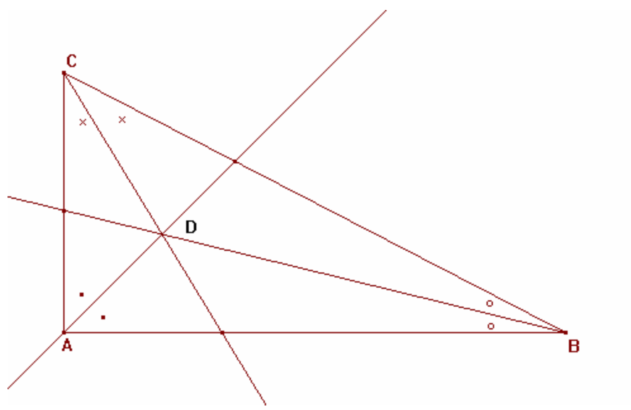


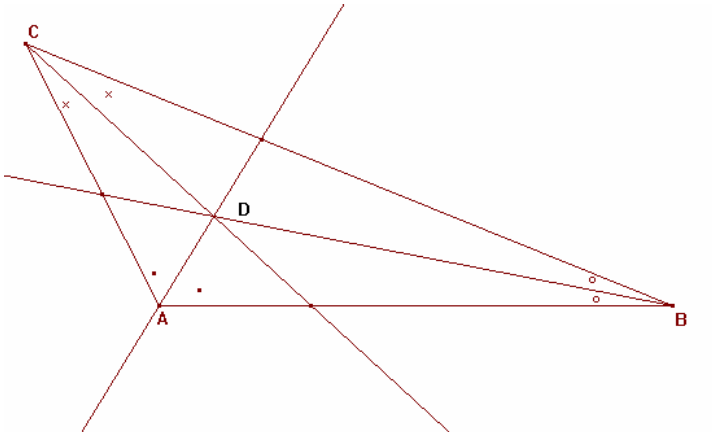


Vermoeden:
De drie middelloodlijnen gaan door 1 punt.

33b.

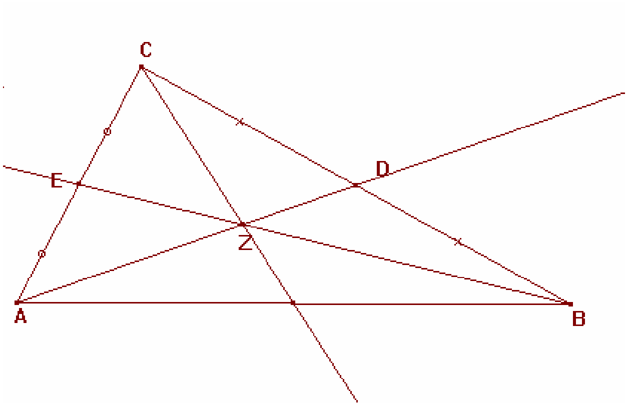


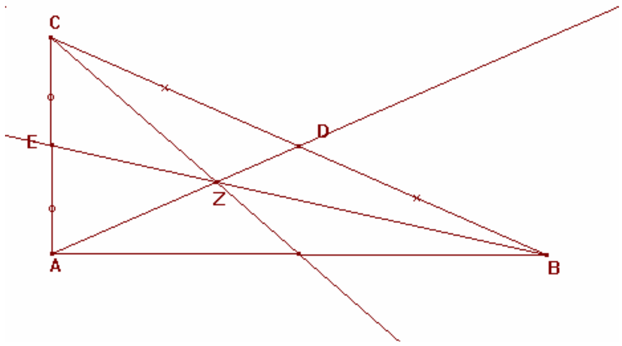


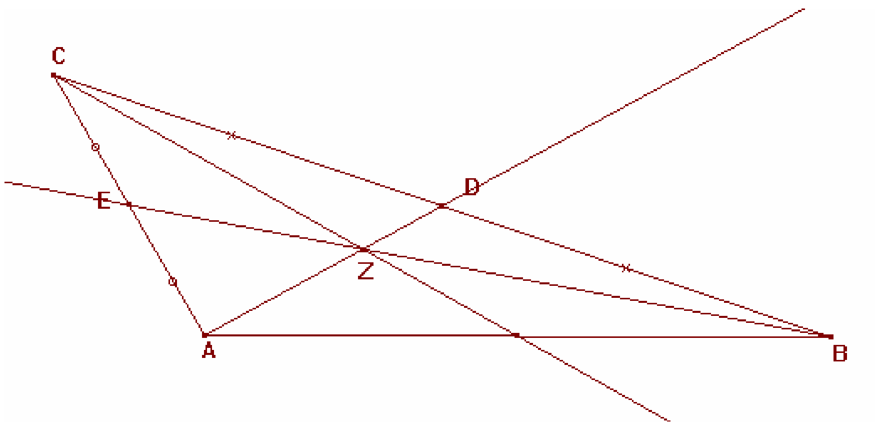


Vermoeden:
De drie deellijnen gaan door 1 punt.

33c.

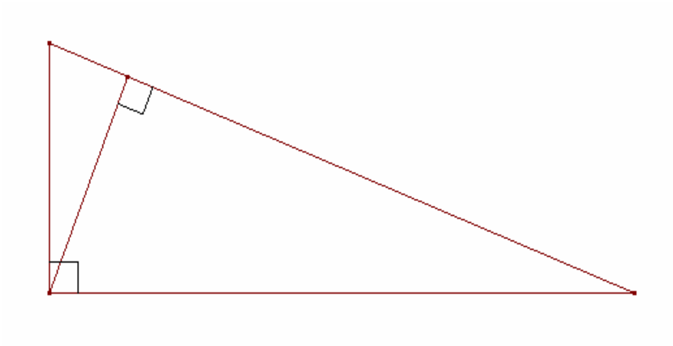


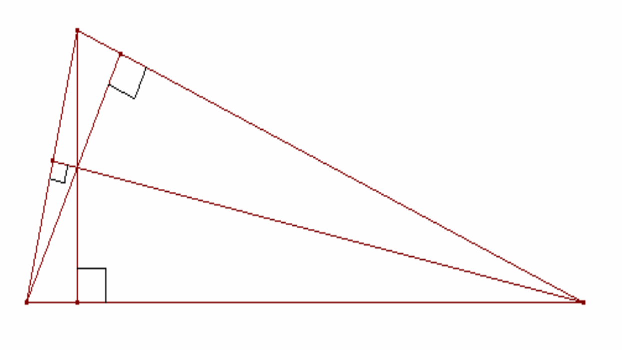


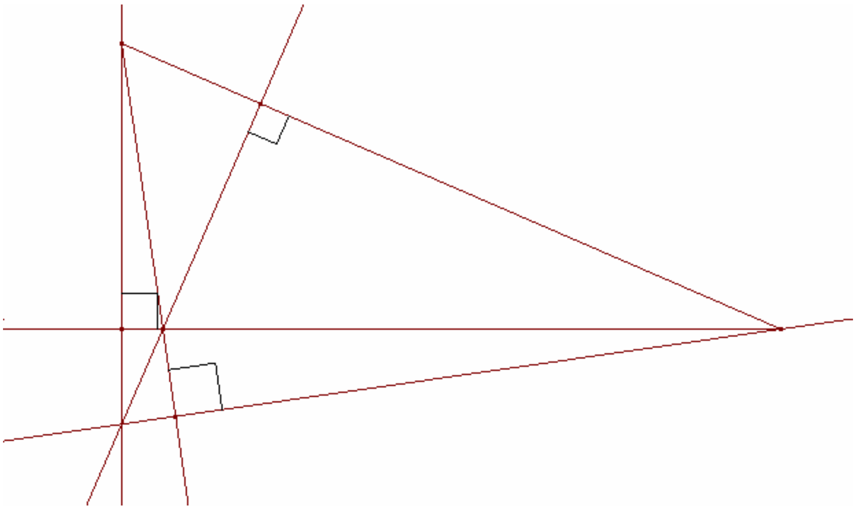


Vermoeden:
De drie zwaartelijnen gaan door 1 punt.

33d.





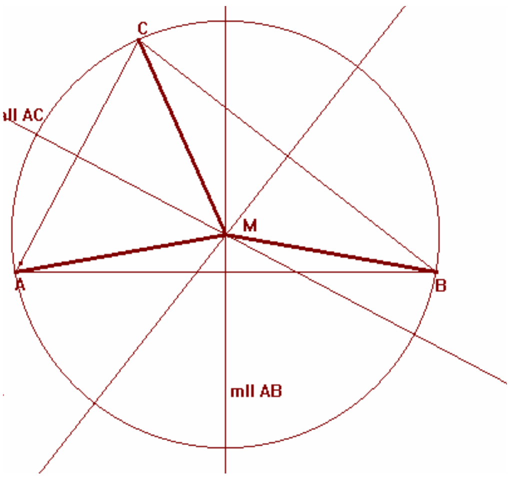


Vermoeden:
De drie hoogtelijnen gaan door 1 punt

34.
a. De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt.

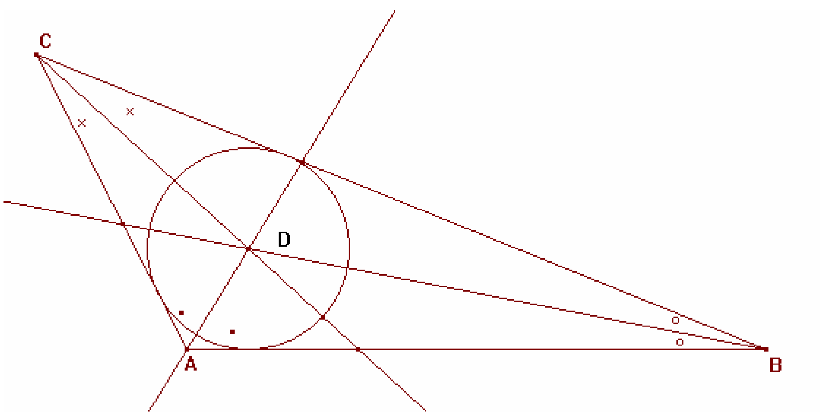
b.

De cirkel door punt A en middelpunt het punt M gaat ook door de punten B en C.



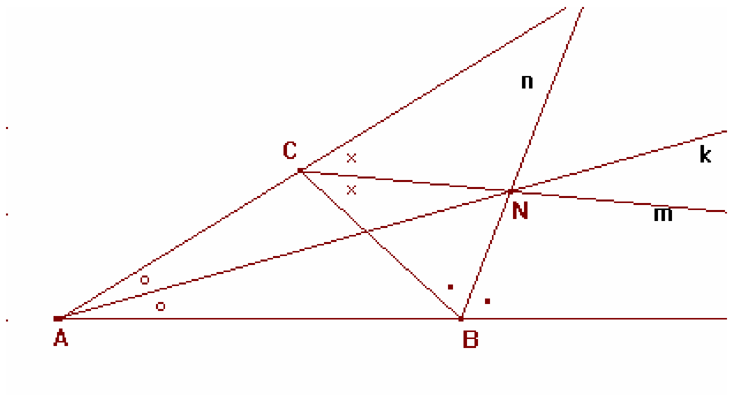
35.
a. De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt.
b. De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

36.
a. De drie bissectrices van een driehoek gaan door één punt.
b.



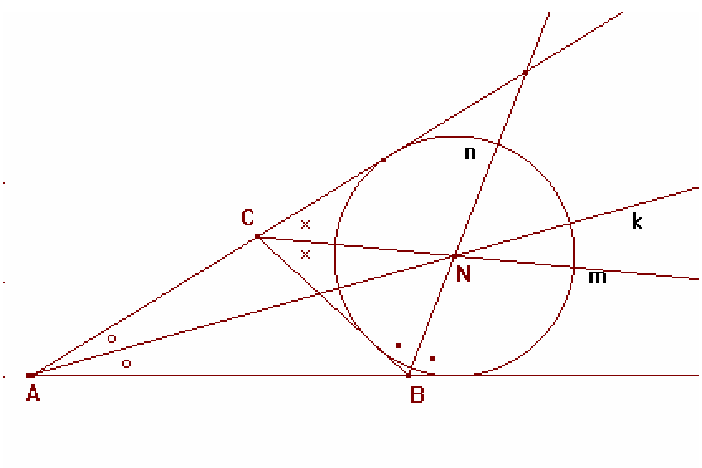
De cirkel die een zijde van een driehoek raakt met middelpunt het snijpunt van de 3 deellijnen, raakt ook de andere twee zijden van de driehoek.

37a.

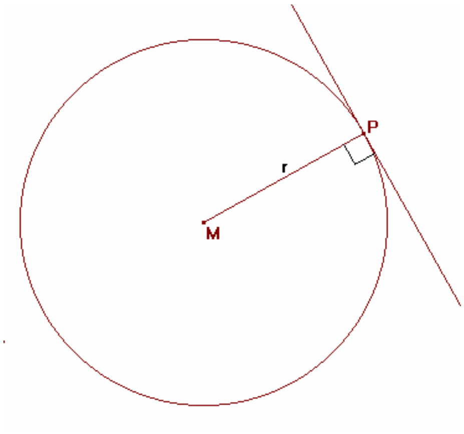


De bissectrice van hoek A en de buiten bissectrices van de hoeken B en C gaan door één punt.

b.
De cirkel die zijde BC raakt met middelpunt het snijpunt van de twee buitenbissectrices van B en C en de bissectrice van hoek A , raakt ook de lijnen AB en AC.

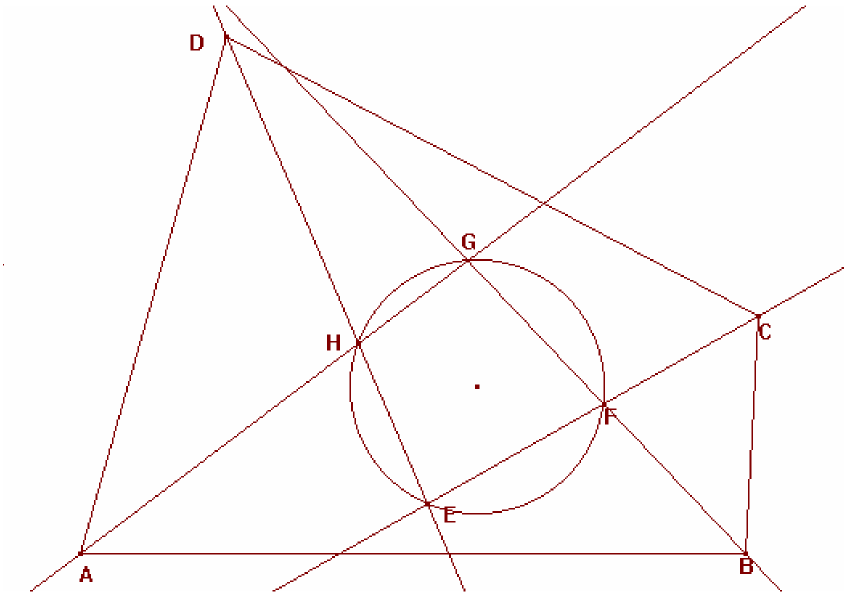


38.



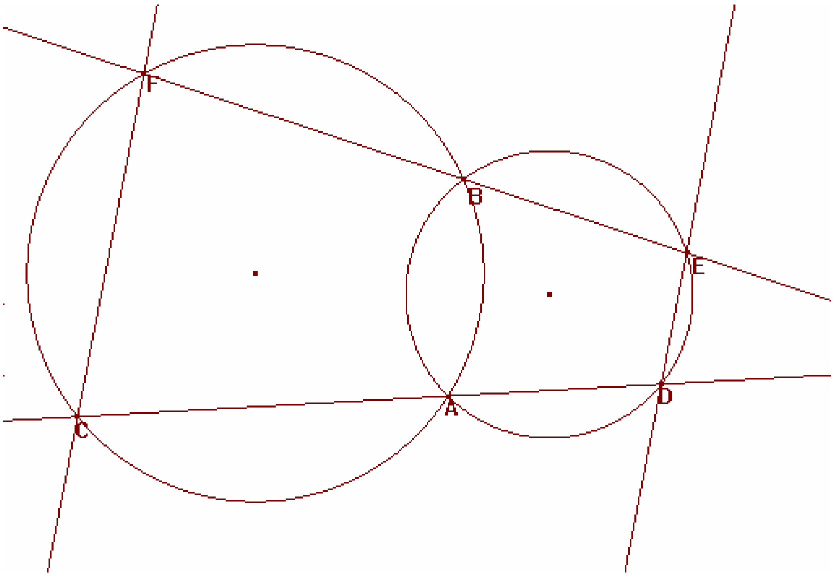
De raaklijn aan een cirkel en de straal staan loodrecht op elkaar.

39.

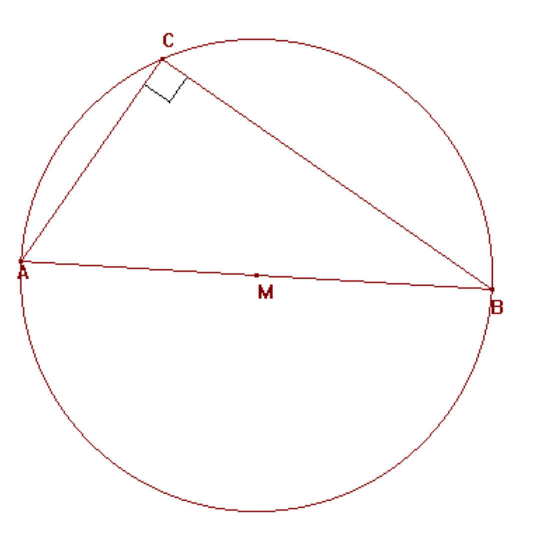


De cirkel door de punten E , F en G gaat ook door het punt H.

40.
De lijnen CF en DE lopen evenwijdig.

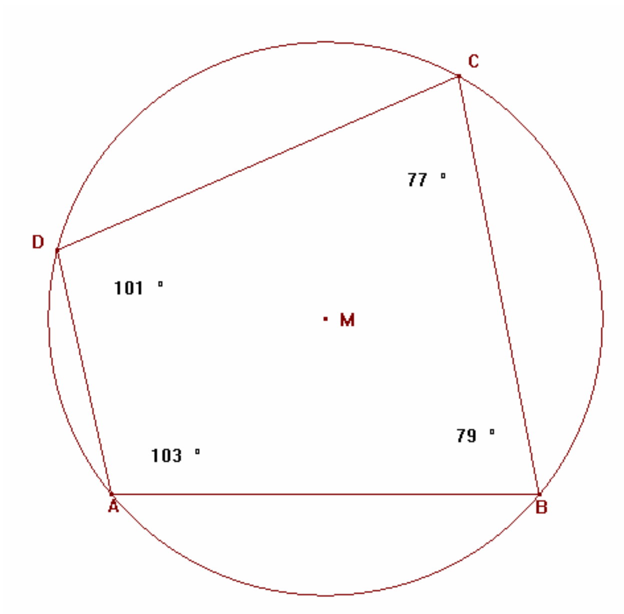


41.



We zien dat $\angle$ ACB = 90°.

42.

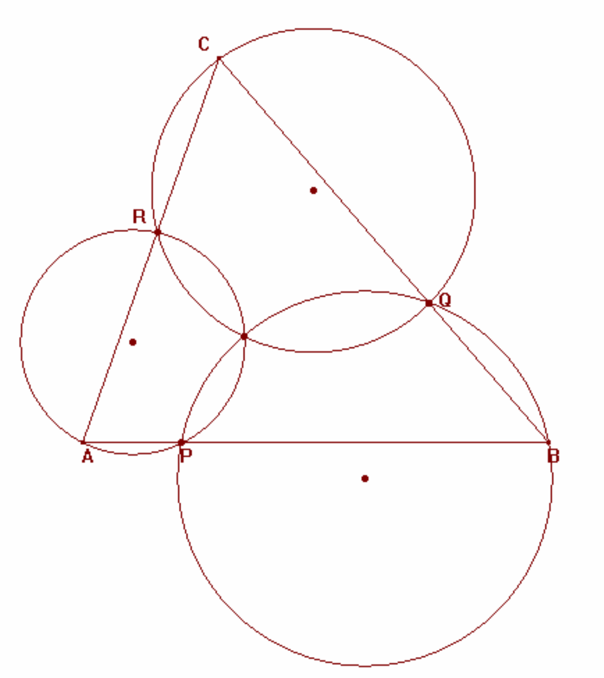


$\angle$ A + $\angle$ C = 180° en
$\angle$ B + $\angle$ D = 180°

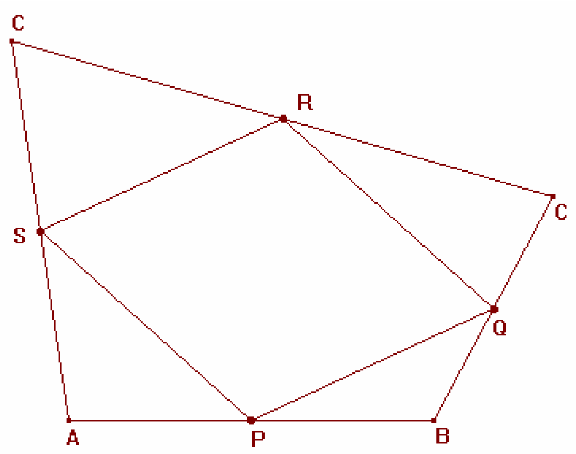
43. Punt C blijkt dan te liggen op de cirkel door de punten A , B en D.

44.

De drie aangegeven cirkels gaan door één punt.

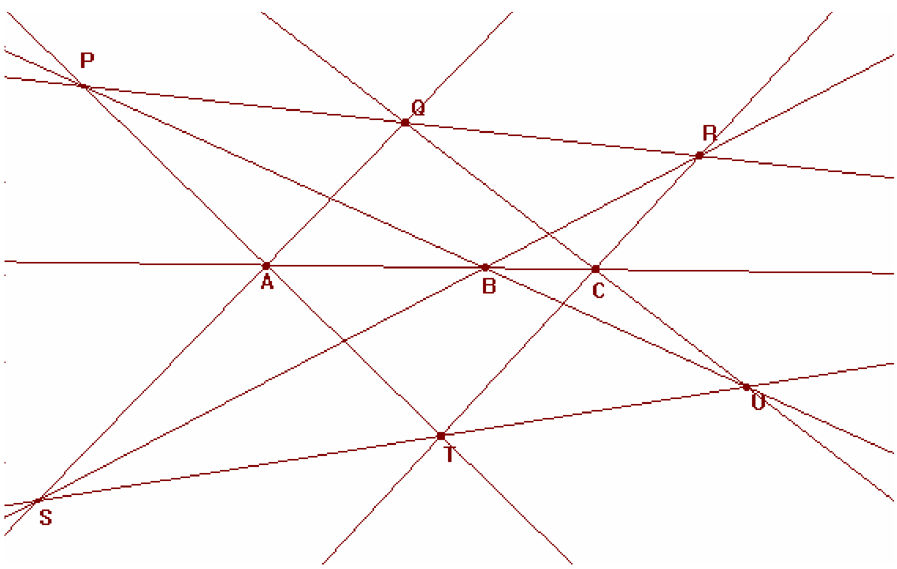


45.



Vierhoek PQRS is een parallellogram.

46.

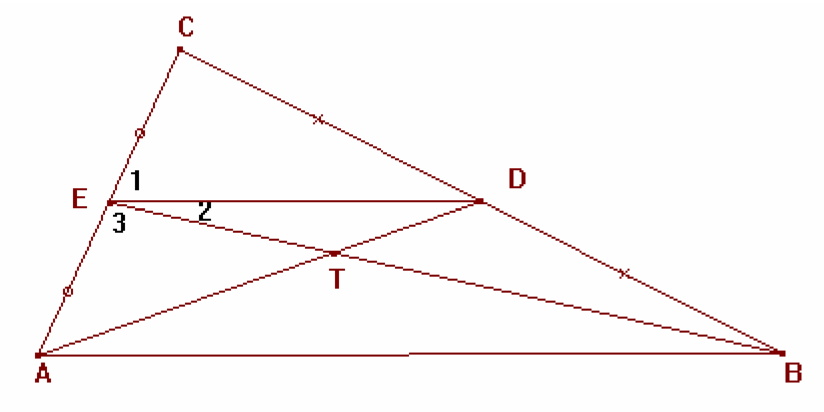


De punten A , B en C liggen op één lijn.

47a.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A=B\\B=C\end{array}\right\}\Rightarrow A=C\\C=D\end{array}\right\}\Rightarrow A=D$$

b. $$\left.\begin{array}{l}\angle A+\angle B+\angle C=180^{\circ}\\\angle A+\angle D=180^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle B+\angle C=\angle D$$



48a.
Gegeven: Δ ABC met de drie zwaartelijnen

Te bew. AT : DT = 2 : 1

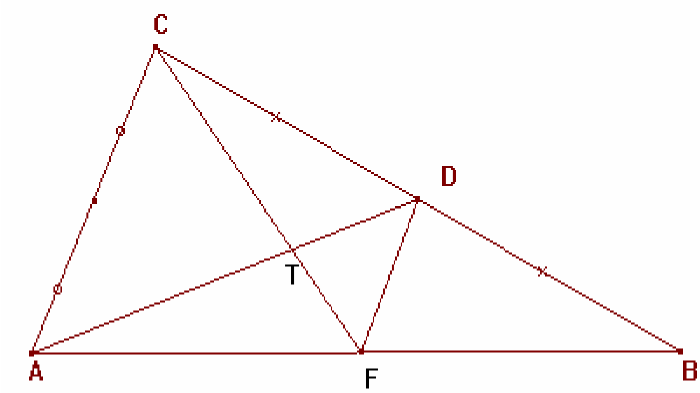
Bewijs: $$\left.\begin{array}{l}AC=2.EC\\BC=2.CD\\\angle C=\angle C\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC:\ \Delta EDC(zhz)\Rightarrow AB:ED=2:1$$ en $\angle E_1 = \angle CAB$ $\Rightarrow$

AB // ED $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\angle E_2=\angle EBA\\en\ \angle EDT=\angle TAB\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ETD:\ \Delta BTA(hh)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}AB:ED=AT:DT\\we\text{ weten AB:ED}=2{:}1\end{array}\right\}\Rightarrow AT:DT=2:1$$

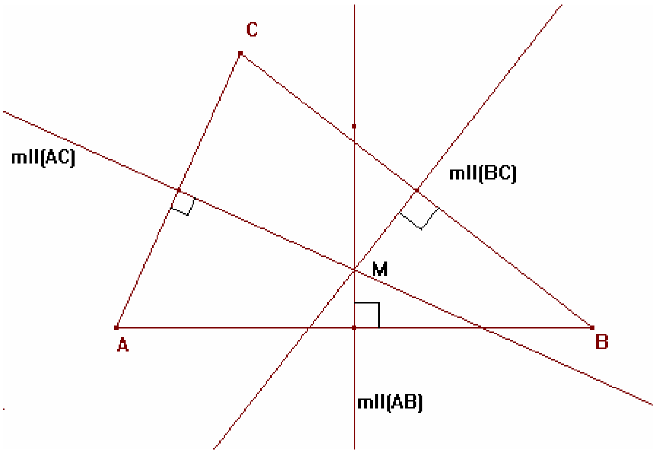
48b. Uit de gelijkvormigheid van Δ ETD en Δ BTA volgt ook dat BT : ET = 2 : 1
Nu nieuwe tekening met de derde zwaartelijn uit C.



Te bew. CT : FT = 2 : 1

Bewijs: Dit is dezelfde situatie als bij onderdeel a . Nu bij twee andere zwaartelijnen ⇒
AC : FD = 2 : 1 en AC // FD ⇒ AT : DT = CT : FT = 2 : 1.
Uit de combinatie van a en b volgt dat de zwaartelijnen in iedere driehoek elkaar verdelen in stukken van 2 : 1.

49.



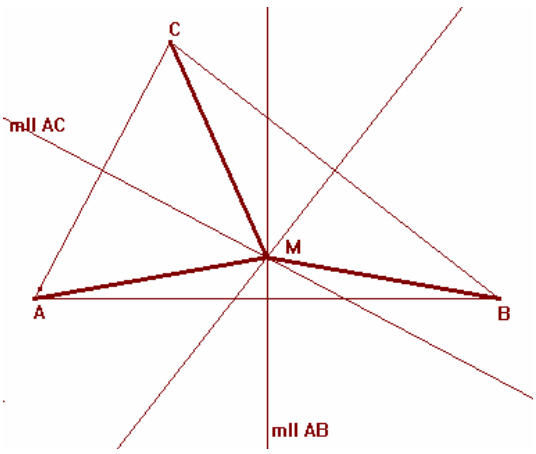
a.

Gegeven: ΔABC en de drie m.l.l.

Te bew. De drie m.l.l. gaan door één punt.

Bewijs: $\left.\begin{array}{l} M \text{ op m.l.l. van AB } \Rightarrow AM = BM \\ M \text{ op m.l.l. van AC } \Rightarrow \text{AM} = \text{CM} \end{array}\right\} \Rightarrow BM = CM \Rightarrow$ M ligt dus op de m.l.l. van BC ⇒ De drie m.l.l. van Δ ABC gaan alle drie door één punt.

50.

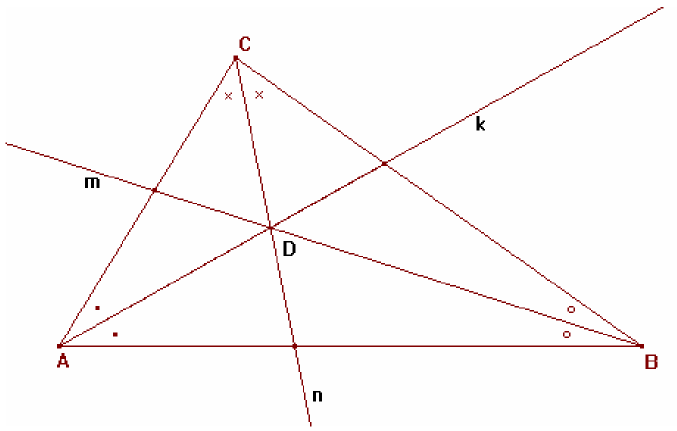


Gegeven : Δ ABC en de drie mll met snijpunt M.

Te bew. M is m.p. van de omgeschreven cirkel van Δ ABC

Bewijs: $\left.\begin{array}{l} M \ op \ mll_{AB} \ \Rightarrow MA = MB \\ M \ op \ mll_{AC} \ \Rightarrow MA = MC \end{array}\right\} \Rightarrow MA = MB = MC \Rightarrow$ M is het m.p. van de cirkel door A , B en C . ⇒ M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van Δ ABC.

51.



Gegeven Δ ABC met de drie deellijnen k , m en n.

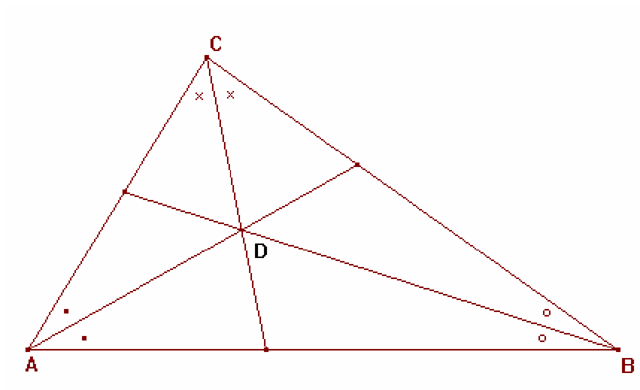
te bew. k , m en n door één punt

Bewijs: De deellijnen k en m snijden elkaar in D $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\text{D op k dus } d(D,AC) = d(D,AB) \\ \text{D op m dus } d(D,BC) = d(D,AB)\end{array}\right\} \Rightarrow d(D,AC) = d(D,BC) \Rightarrow \text{ook D ligt op de deellijn van}$$

$\angle$ C en dus ook op n $\Rightarrow$ de drie deellijnen k , m en n gaan door één punt.

52.



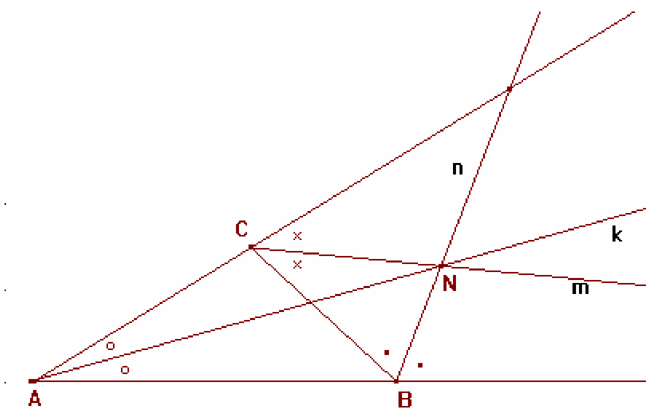
Gegeven Δ ABC en de 3 deellijnen die door punt D gaan.

te bew.
D is het middelpunt van de ingeschreven cirkel

$$\text{Bewijs: } \left.\begin{array}{l}\text{D op bissectrice van hoek A } \Rightarrow d(D,AB) = d(D,AC) \\ \text{D op bissectrice van hoek B } \Rightarrow d(D,AB) = d(D,BC)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow d(D,AB) = d(D,AC) = d(D,BC)$ $\Rightarrow$ D is dus het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC.

53.



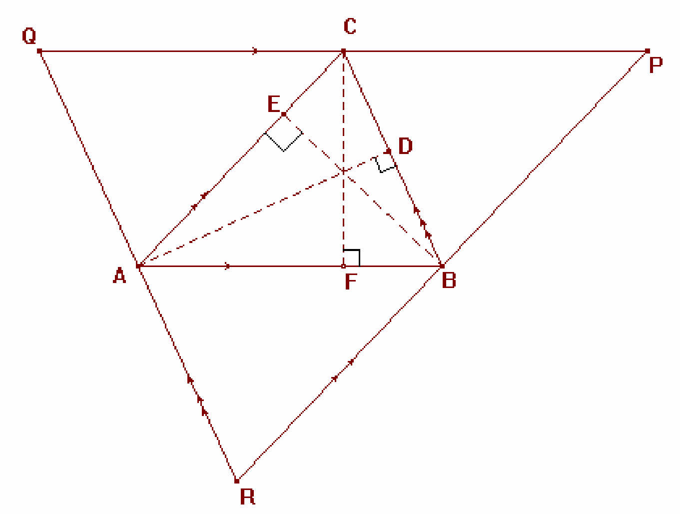
geg. Δ ABC met bissectrice k van $\angle$ A en de buitenbissectrices m en n van de hoeken B en C.

te bew.
De lijnen k , m en n gaan door één punt

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\text{N op bissectrice van hoek A} \Rightarrow d(N,AB) = d(N,AC) \\ \text{N op bissectrice van hoek B} \Rightarrow d(N,AB) = d(N,BC)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ d(N,AC) = d(N,BC) $\Rightarrow$ N ook op bissectrice van $\angle$ C $\Rightarrow$ de drie deellijnen k , m en n gaan door éé n punt.

54. a en b.

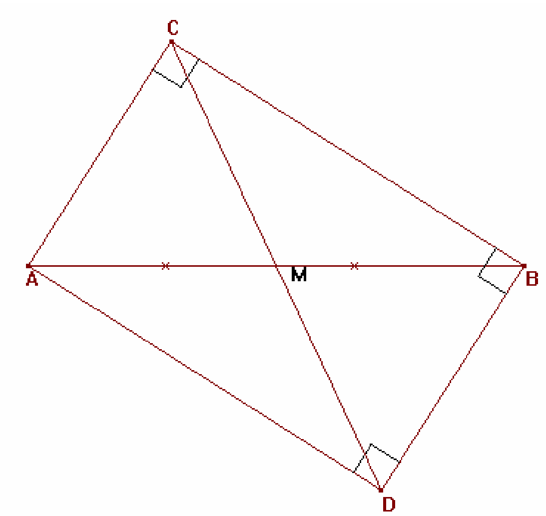


Gegeven Δ ABC ; AB // PQ BC // QR ; AC // PR en de drie hoogtelijnen van Δ ABC

te bew. de drie hoogtelijnen gaan door één punt

Bewijs: Aangezien PQ // AB en QR // BC en AC // PR $\Rightarrow$ ABPC ; ABCQ en ARBC zijn pgm. $\Rightarrow$
QC = AB en CP = AB $\Rightarrow$ QC = CP Zo geldt ook dat RB = PB en QA = RA
Verder geldt dat CF is een hoogtelijn $\Rightarrow$ CF $\perp$ AB Je weet dat AB // PQ $\Rightarrow$ CF $\perp$ PQ Nu weet je dus dat QC = PC en CF $\perp$ QP $\Rightarrow$ CF is mll van PQ.
Zo zijn ook AD en BE mll. van QR en PR .
De drie hoogtelijnen van Δ ABC zijn dus ook de drie mll. van Δ PQR. De drie mll. gaan door één punt $\Rightarrow$ de drie hoogtelijnen van Δ ABC gaan dus ook door één punt.

55a.



Gegeven: Δ ABC en $\angle$ C = 90º en AM = BM

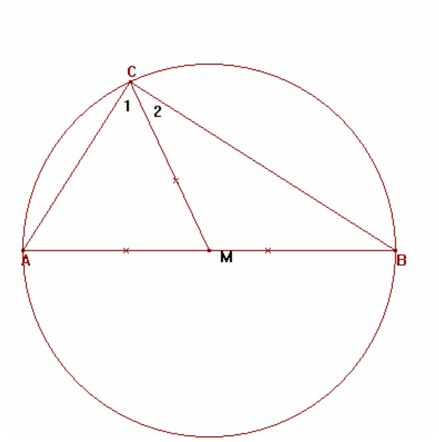
Te bew. AM = BM = CM

Bewijs: Teken vanuit Δ ABC nu de rechthoek ADBC met de diagonalen AB en CD. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} CD = AB \\ AM = BM \\ ABCD \text{ is rechthoek en dus ook een pgm} \end{array}\right\} \Rightarrow CM = AM = BM$$

b.

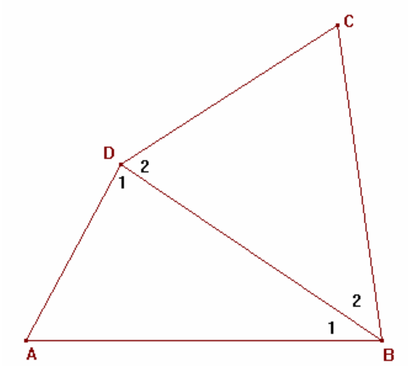
Gegeven : Δ ABC en omgeschreven cirkel met middellijn AB met AM = BM .



Te bew. $\angle$ ACB = 90º

$$\text{Bewijs: } \left.\begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180° \\ AM = CM \;\Rightarrow\; \angle A = \angle C_1 \\ BM = CM \;\Rightarrow\; \angle B = \angle C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180° \Rightarrow 2.\angle C_{12} = 180° \Rightarrow \angle C_{12} = 90°$$

56.



Gegeven: vierhoek ABCD

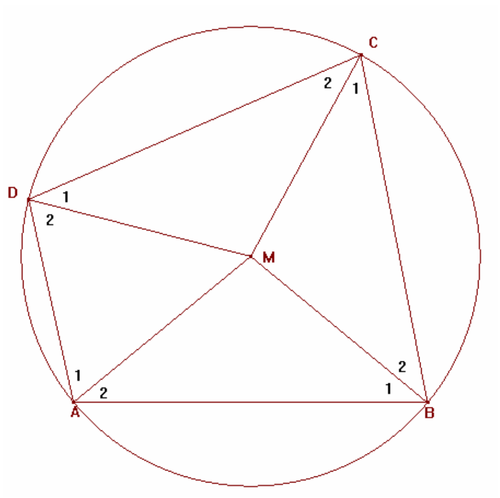
Te bew. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

Bewijs: Trek de diagonaal BD $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A + \angle B_1 + \angle D_1 = 180° \\ \angle C + \angle B_2 + \angle D_2 = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B_1 + \angle D_1 + \angle C + \angle B_2 + \angle D_2 = 360° \Rightarrow$$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

57.



Gegeven :
vierhoek ABCD met de hoekpunten op een cirkel en middelpunt binnen ABCD

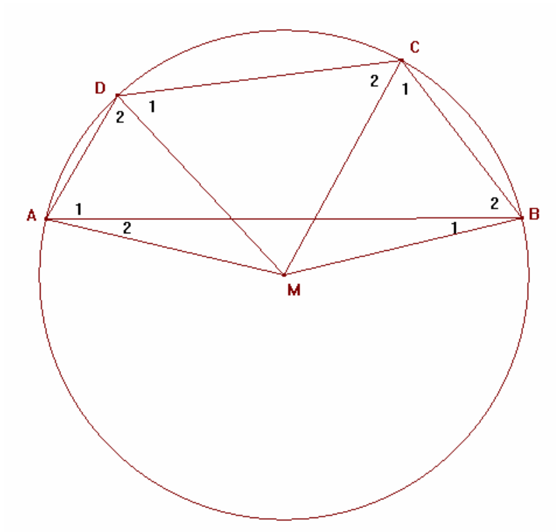
Te bew. $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Teken de 4 lijnstukken naar A,B,C en D vanuit M. $\Rightarrow$ 4 gelijkbenige driehoeken $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle A_2 = \angle B_1 \\ \angle C_1 = \angle B_2 \\ \angle C_2 = \angle D_1 \\ \angle A_1 = \angle D_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_2 + \angle A_1 + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle B_1 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle D_2 \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

b.



Gegeven:
vierhoek ABCD met de hoekpunten op een cirkel en middelpunt buiten ABCD

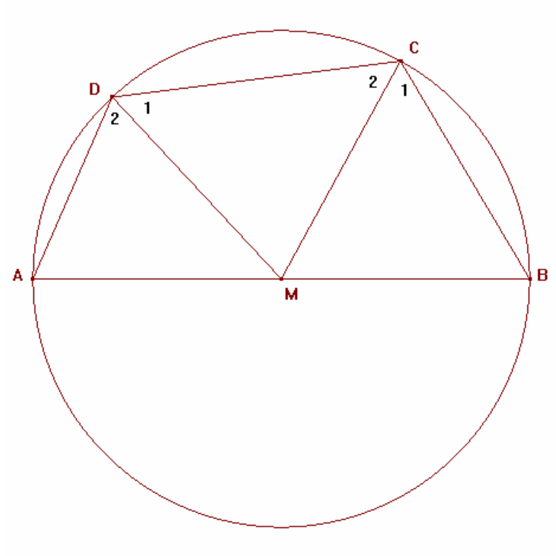
Te bew: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Teken weer de 4 lijnstukken $\Rightarrow$ er ontstaan weer 4 gelijkbenige driehoeken. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \angle A_{12} &= \angle D_2 \\ \angle C_2 &= \angle D_1 \\ \angle C_1 &= \angle B_{12} \\ \angle A_2 &= \angle B_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle A_{12} + \angle C_2 + \angle C_1 - \angle A_2 = \angle D_2 + \angle D_1 + \angle B_{12} - \angle B_1 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \angle A_1 + \angle C_{12} &= \angle B_2 + \angle D_{12} \\ \angle A_1 + \angle B_2 + \angle C_{12} + \angle D_{12} &= 360^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle A_1 + \angle C_{12} = 180^\circ \text{ en } \angle B_2 + \angle D_{12} = 180^\circ$$

c.



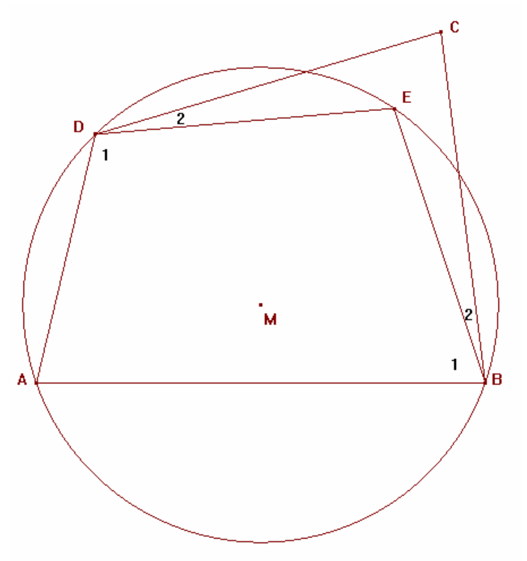
Gegeven: vierhoek ABCD met de hoekpunten op een cirkel en middelpunt M op een zijde van ABCD.

Te bew: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$$\text{Bew. Teken DM en MC} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \angle A &= \angle D_2 \\ \angle C_2 &= \angle D_1 \\ \angle C_1 &= \angle B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle C_2 + \angle C_1 = \angle D_2 + \angle D_1 + \angle B \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \angle A + \angle C &= \angle B + \angle D \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ \text{ en } \angle B + \angle D = 180^\circ$$

58.

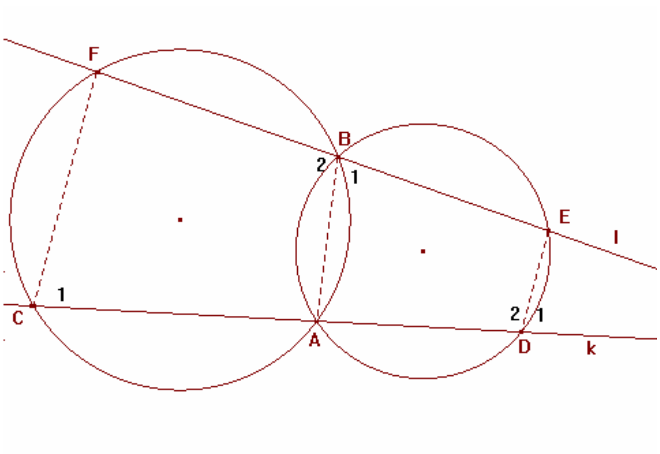


Gegeven: vierhoek ABCD met A , B en D op de cirkel en C buiten de cirkel.

Te bew. $\angle A + \angle C < 180^\circ$

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle B_1 + \angle D_1 = 180°(koordenvierhoek) \Rightarrow \angle B_{12} + \angle D_{12} > 180° \\ \angle A + \angle B_{12} + \angle C + \angle D_{12} = 360°\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle C < 180^o$

59.



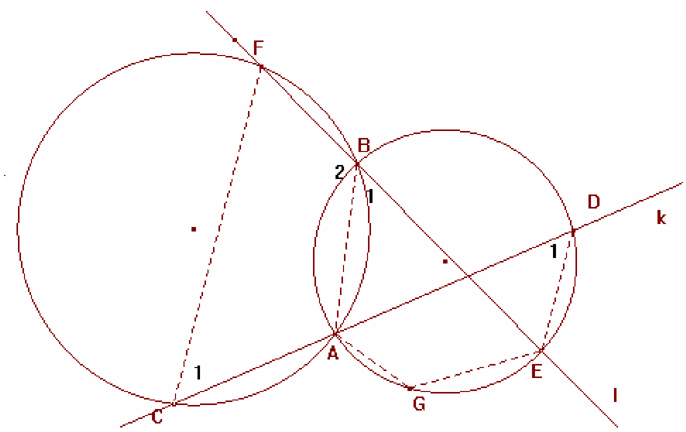
Gegeven: 2 cirkels met snijpunten A en B . De lijnen k en l door de punten A en B. Snijpunten zijn verder C , D , E en F.

Te bew. CF // DE

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle C_1 + \angle B_2 = 180°(koordenvierhoek) \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180°(gestrekte\ hoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1 = \angle B_1 \\ \left.\begin{array}{l}\angle B_1 + \angle D_2 = 180°(koordenvierhoek) \\ \angle D_1 + \angle D_2 = 180°(gestrekte\ hoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle D_1 = \angle B_1\end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1 = \angle D_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ CF // DE (F-hoeken)

60.



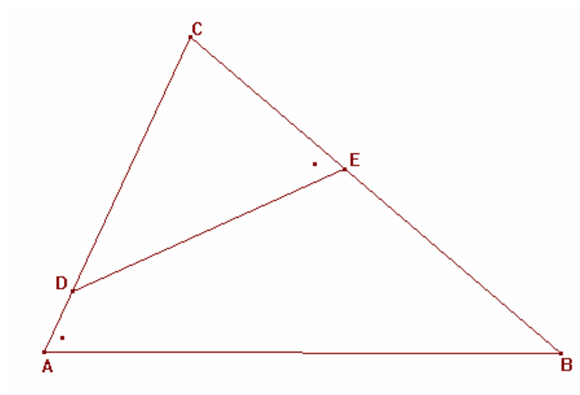
Gegeven: 2 cirkels met snijpunten A en B . De lijnen k en l door de punten A en B. Snijpunten zijn verder C , D , E en F. Punt E ligt tussen A en D.

Te bew. DE // CF

Bewijs: Teken een punt G op de cirkel tussen A en E en teken verder de gestippelde lijnstukken. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}\left.\begin{aligned}&\angle C_1+\angle B_2=180°(koordenvierhoek)\\&\angle B_1+\angle B_2=180°(gestrekte\ hoek)\end{aligned}\right\}&\Rightarrow \angle C_1=\angle B_1\\\left.\begin{aligned}&\angle B_1+\angle AGE=180°(koordenvierhoek)\\&\angle D_1+\angle AGE=180°(koordenvierhoek)\end{aligned}\right\}&\Rightarrow \angle D_1=\angle B_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \angle \mathrm{C}_1=\angle \mathrm{D}_1 \Rightarrow \text{CF // ED (z-hoeken)}$$

61a.

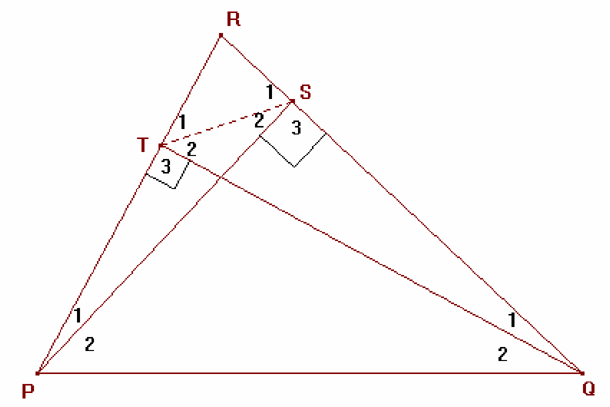


Gegeven: $\angle$ A = $\angle$ CED (DE is antiparallel) en Δ ABC.

Te bew. ABED is een koordenvierhoek.

Bewijs: $\left.\begin{aligned}&\angle CED=\angle A(geg)\\&\angle CED+\angle DEB=180°\end{aligned}\right\}\Rightarrow \angle A+\angle DEB=180° \Rightarrow$ ABDE is een koordenvierhoek

b.



Gegeven: Δ PQR met PS $\perp$ QR en QT $\perp$ PR

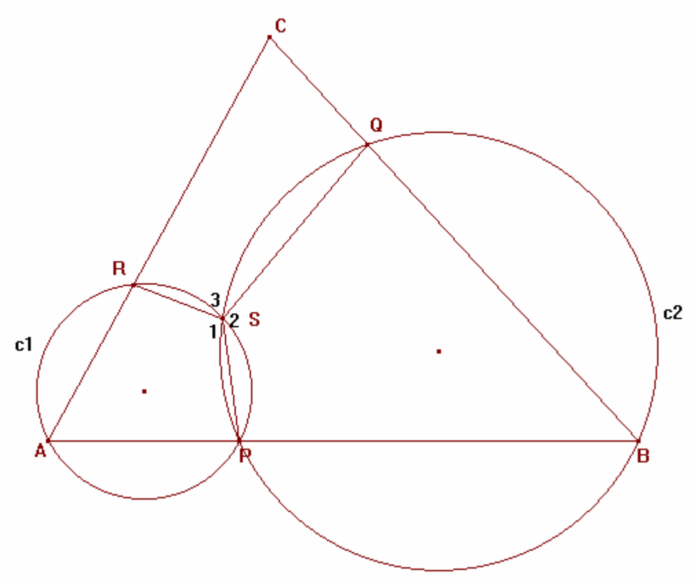
Te bew. ST is antiparallel met PQ

Bewijs: Teken TS $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&\angle T_3=90°\Rightarrow \text{ T ligt op de cirkel met middellijn PQ(Thales)}\\&\angle S_3=90°\Rightarrow \text{ S ligt op de cirkel met middellijn PQ(Thales)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow PQST\ \ is\ een\ koordenvierhoek$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}&\angle P_{12}+\angle S_{23}=180°(koordenvierhoek)\\&\angle S_1+\angle S_{23}=180°(gestrekte\ \text{hoek})\end{aligned}\right\}\Rightarrow \angle \mathrm{P}_{12}=\angle \mathrm{S}_1\Rightarrow \text{ST is antiparallel met PQ}$$

62.



Gegeven:
Δ ABC met P op AB , Q op BC en R op AC. De cirkels c_1 en c_2 door A, P en R en door P , B en Q en cirkel c_3 door C , Q en R.

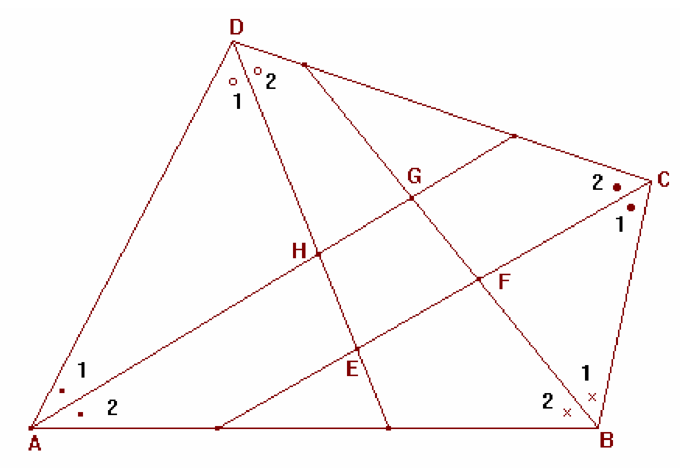
Te bew.
De drie cirkels c_1 , c_2 en c_3 gaan door één punt.

Bewijs: Stel S is een snijpunt van c_1 en c_2. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A+\angle S_1=180°(koordenvierhoek)\\ \angle B+\angle S_2=180°(koordenvierhoek)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle A+\angle B+\angle S_1+\angle S_2=360°\\ \angle S_1+\angle S_2+\angle S_3=360°\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A+\angle B=\angle S_3\\ \angle A+\angle B+\angle C=180°\end{array}\right\}\Rightarrow \angle S_3+\angle C=180°$$ $\Rightarrow$ RSQC is een koordenvierhoek $\Rightarrow$ S ligt op de cirkel door R , C en Q $\Rightarrow$ c_1 , c_2 en c_3 gaan door één punt.

63.



Geg.
ABCD met de vier deellijnen van A,B,C en D , die vierhoek EFGH insluiten

Te bew.
EFGH is een koordenvierhoek

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A_1+\angle D_1+\angle DHA=180^\circ\\ \angle DHA=\angle GHE(overst.h.)\end{array}\right\}\Rightarrow \angle GHE=180^\circ-(\angle A_1+\angle D_1)\\ \left.\begin{array}{l}\angle B_1+\angle C_1+\angle BFC=180^\circ\\ \angle BFC=\angle EFG(overst.h.)\end{array}\right\}\Rightarrow \angle EFG=180^\circ-(\angle B_1+\angle C_1)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle GHE+\angle EFG=180^\circ-\angle A_1-\angle D_1+180^\circ-\angle B_1-\angle C_1\\ \left.\begin{array}{l}\angle A_{12}+\angle B_{12}+\angle C_{12}+\angle D_{12}=360^\circ\\ \angle A_1=\angle A_2\\ \angle B_1=\angle B_2\\ \angle C_1=\angle C_2\\ \angle D_1=\angle D_2\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A_1+\angle B_1+\angle C_1+\angle D_1=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle GHE+\angle EFG=180^\circ\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ vierhoek EFGH is een koordenvierhoek.